

MATERIAŁY DYDAKTYCZNE

do zajęć wyrównawczych z przedmiotu:

Fizyka

dla studentów kierunku

Elektrotechnika

Opracował zespół w składzie:

dr inż. Andrzej Dudziak

dr inż. Karolina Czarnacka

mgr inż. Jakub Grotel

Lublin 2025 r.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.
Utwór dostępny jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe.

1. Wstęp

Zadanie 1.1 Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{6 \cdot 10^{-3}}{\frac{3}{4} \cdot 10^4}$

Rozwiązanie:

Korzystamy z dwóch reguł:

- podzielić liczbę przez ułamek to pomnożyć ją przez odwrotność ułamka
- przy przenoszeniu liczby w zapisie potęgowym z mianownika do licznika lub z licznika do mianownika, należy zmienić znak wykładnika, np:

$$\frac{1}{2 \cdot x^n} = \frac{x^{-n}}{2}$$

Obliczamy:

$$\frac{6 \cdot 10^{-3}}{\frac{3}{4} \cdot 10^4} = \frac{6}{\frac{3}{4}} \cdot \frac{10^{-3}}{10^4} = 6 \cdot \frac{4}{3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} = 8 \cdot 10^{-3-4} = 8 \cdot 10^{-7}$$

Zadanie 1.2 Oblicz wartość wyrażenia: $0,321 \cdot 10^{-5} + 21,7 \cdot 10^{-7}$

Rozwiązanie:

Aby wykonać obliczenia, w obu wyrazach należy ujednolicić wykładniki. Decydujemy, że będą one równe -5 . Przekształcamy drugi wyraz, tj. $21,7 \cdot 10^{-7}$.

Pierwszy czynnik ($21,7$) dzielimy przez 100 , zaś drugi czynnik mnożymy przez 100 ($100 = 10^2$), w ten sposób nie zmieniamy wartości drugiego wyrazu.

$$21,7 \cdot 10^{-7} = 21,7 \cdot \left(\frac{1}{100} \cdot 10^2 \right) \cdot 10^{-7} = \frac{21,7}{100} \cdot 10^2 \cdot 10^{-7} = 0,217 \cdot 10^{-5}$$

Wykorzystano zależność:

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k},$$

czyli:

$$10^{-7} \cdot 10^2 = 10^{-7+2} = 10^{-5}$$

Sumarycznie można powiedzieć, że jeśli drugi czynnik zwiększamy 100-krotnie poprzez zwiększenie wykładnika o 2, to pierwszy czynnik należy zmniejszyć 100-krotnie poprzez przesunięcie przecinka o 2 cyfry w lewo (w ten sposób wartość iloczynu nie zmienia się).

Wykonujemy dodawanie

$$0,321 \cdot 10^{-5} + 21,7 \cdot 10^{-7} = 0,321 \cdot 10^{-5} + 0,217 \cdot 10^{-5} = (0,321 + 0,217) \cdot 10^{-5} = 0,538 \cdot 10^{-5}$$

Ponieważ w zapisie potęgowym liczby przed przecinkiem zazwyczaj zapisujemy jedną cyfrę różną od zera, więc wykonujemy operację podobną do wyżej opisanej:

$$0,538 \cdot 10^{-5} = 0,538 \cdot (10 \cdot 10^{-1}) \cdot 10^{-5} = (0,538 \cdot 10) \cdot (10^{-1} \cdot 10^{-5}) = 5,38 \cdot 10^{-6}$$

Zadanie 1.3 Przelicz:

- temperaturę $17,3^{\circ}\text{C}$ na temperaturę w Kelvinach
- temperaturę $4,5\text{ K}$ oraz $77,3\text{ K}$ na stopnie Celsjusza
- czas $15\text{ }\mu\text{s}$ na milisekundy
- długość fali światła 550 nm na mikrometry

Rozwiązanie:

Temperaturę w stopniach Celsjusza oznacza się literą t , zaś temperaturę w skali Kelvina literą T . Związek pomiędzy ich wartościami jest następujący:

$$T[\text{K}] = t[^{\circ}\text{C}] + 273,15$$

$$t[^{\circ}\text{C}] = T[\text{K}] - 273,15$$

Zatem 0°C odpowiada $273,15\text{ K}$, zaś 0 K to $-273,15^{\circ}\text{C}$

$$\text{a)} \quad T[\text{K}] = 17,3 + 273,15 = 290,45\text{ K}$$

$$\text{b)} \quad t_1[^{\circ}\text{C}] = 4,5 - 273,15 = -268,65^{\circ}\text{C}$$

$$t_2[^{\circ}\text{C}] = 77,3 - 273,15 = -95,85^{\circ}\text{C}$$

$$\text{c)} \quad 1\text{ }\mu\text{s} = 10^{-6}\text{ s}, 1\text{ ms} = 10^{-3}\text{ s}$$

$$15\text{ }\mu\text{s} = 15 \cdot 10^{-6}\text{ s} = 15 \cdot (10^{-3} \cdot 10^{-3})\text{ s} = 15 \cdot 10^{-3} \cdot (10^{-3}\text{ s}) = 15 \cdot 10^{-3}\text{ ms} = 0,015\text{ ms}$$

$$\text{d)} \quad 1\text{ nm} = 10^{-9}\text{ m}, 1\text{ }\mu\text{m} = 10^{-6}\text{ m}$$

$$550\text{ nm} = 550 \cdot 10^{-9}\text{ m} = 550 \cdot 10^{-3} \cdot (10^{-6}\text{ m}) = 0,55\text{ }\mu\text{m}$$

Zadanie 1.4 Zapisać w notacji wykładniczej:

3 258; 6 752 186; $254869 \cdot 10^4 \cdot 10^{-2}$; 0,0027; 0,00005076

Rozwiązanie:

$$3258 = 3,258 \cdot 1000 = 3,258 \cdot 10^3$$

$$6752186 = 6,752186 \cdot 1000000 = 6,752186 \cdot 10^6$$

$$254869 \cdot 10^4 \cdot 10^{-2} = 2,54869 \cdot 10^5 \cdot 10^4 \cdot 10^{-2} = 2,54869 \cdot 10^{5+4-2} = 2,54869 \cdot 10^7$$

$$0,0027 = \frac{2,7}{1000} = \frac{2,7}{10^3} = 2,7 \cdot 10^{-3}$$

$0,00005076 = 0,00005076 \cdot (10^5 \cdot 10^{-5}) = (0,00005076 \cdot 10^5) \cdot 10^{-5} = 5,076 \cdot 10^{-5}$ — jeśli przecinek przesuwamy w prawo o 5 miejsc, to liczbę należy przemnożyć przez 10^{-5} aby nie zmienić jej wartości.

Zadanie 1.5 Po odpompowaniu 2 l zbiornika jego masa zmniejszyła się o 2,58 g. Jaka jest gęstość powietrza (w kg/m^3)

Rozwiązanie:

Gęstość substancji (ρ - ro) jest równa stosunkowi masy ciała m do jego objętości V :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Zamieniamy jednostki danych, aby otrzymać wynik we właściwych jednostkach

$$m = 2,58 \text{ g} = 2,58 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \quad (1 \text{ g} = 1/1000 \text{ kg})$$

$$V = 2 \text{ l} = 2 \text{ dm}^3 = 2 \cdot (10^{-1} \text{ m})^3 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad (1 \text{ dm} = 1/10 \text{ m})$$

Obliczamy gęstość powietrza:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{2,58 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} = \frac{2,58 \text{ kg}}{2 \text{ m}^3} = 1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Zadanie 1.6 Po jakim czasie światło wyemitowane ze Słońca dotrze do Ziemi, jeśli odległość Ziemi od Słońca wynosi 150 mln km, a światło w próżni rozchodzi się z prędkością 300 000 km/s?

Rozwiązanie:

Prędkość w ruchu jednostajnym (v) jest równa stosunkowi przebytej drogi s do czasu t :

$$v = \frac{s}{t}$$

Mnożymy obustronnie przez t :

$$v \cdot t = s$$

Dzieląc przez v otrzymujemy wzór na szukany czas:

$$t = \frac{s}{v}$$

Przed podstawieniem danych przekształcamy je do zapisu potęgowego:

$$s = 150 \text{ mln km} = 150 \cdot 10^6 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^2 \cdot 10^6 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$$

$$v = 300\,000 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^5 \text{ km/s}$$

Obliczamy czas:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1,5 \cdot 10^8 \text{ km}}{3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}} = \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}}{3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}} = \frac{1500}{3} \text{ s} = 500 \text{ s}$$

Przeliczamy czas na minuty:

$$t = \frac{500 \text{ s}}{60 \frac{\text{s}}{\text{min}}} = \frac{50}{6} \frac{\text{s} \cdot \text{min}}{\text{s}} = 8 \frac{1}{3} \text{ min}$$

Zadanie 1.7 Ile razy powierzchnia i objętość piłki nożnej o średnicy $D = 20 \text{ cm}$ jest większa od powierzchni i objętości piłki do tenisa stołowego o średnicy $d = 4 \text{ cm}$?

Rozwiązanie:

Traktujemy piłki jako kule i wykorzystujemy wzory na pole powierzchni kuli i objętość kuli:

$$S = 4\pi R^2,$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Ponieważ znamy wartości średnicy piłek, wykorzystujemy związek średnicy i promienia:

$$R = D/2$$

$$S = 4\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{D^2}{4} = \pi D^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{D^3}{8} = \frac{\pi D^3}{6}$$

Do wzorów stosujemy odpowiednie znaczki dolne i oznaczenia średnic.

Dla piłki nożnej:

$$S_n = \pi D^2$$

$$V_n = \frac{\pi D^3}{6}$$

Dla piłki tenisowej:

$$S_t = \pi d^2$$

$$V_t = \frac{\pi d^3}{6}$$

Stosunek powierzchni:

$$\frac{S_n}{S_t} = \frac{\pi D^2}{\pi d^2} = \frac{D^2}{d^2} = \left(\frac{D}{d}\right)^2 = \left(\frac{20\text{cm}}{4\text{cm}}\right)^2 = \left(\frac{5}{1}\right)^2 = 25$$

Ostatecznie:

$$S_n = 25 \cdot S_t$$

Stosunek objętości:

$$\frac{V_n}{V_t} = \frac{\frac{\pi D^3}{6}}{\frac{\pi d^3}{6}} = \frac{\pi D^3}{6} \cdot \frac{6}{\pi d^3} = \frac{D^3}{d^3} = \left(\frac{D}{d}\right)^3 = \left(\frac{20\text{cm}}{4\text{cm}}\right)^3 = 5^3 = 125$$

Ostatecznie:

$$V_n = 125 \cdot V_t$$

Zadanie 1.8. Uzwojenie pierwotne transformatora z drutem i promieniu 1 mm ma masę 17,8 kg. Jaką długość ma drut, jeśli gęstość miedzi wynosi 8,9 g/cm³?

Rozwiązanie:

Gęstość ciała (ρ – ρ_0) jest równa stosunkowi masy ciała m do jego objętości V :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Przekrój poprzeczny drutu ma kształt koła, którego pole S wyraża się wzorem:

$$S = \pi R^2$$

Drut traktujemy jako długi walec o promieniu R i wysokości (długości) L . Objętość walca równa jest iloczynowi pola podstawy S i wysokości L

$$V = S \cdot L = \pi R^2 L$$

Wstawiamy powyższą zależność do wzoru na gęstość:

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 L}$$

Przekształcamy ten wzór aby otrzymać wyrażenie na długość drutu:

$$\rho \pi R^2 L = m$$

$$L = \frac{m}{\pi R^2 \rho}$$

Przed podstawieniem danych ujednicamy jednostki:

$$R = 1\text{mm} = 0,001\text{m} = 10^{-3}\text{ m}$$

$$\rho = 8,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 8,9 \frac{0,001\text{kg}}{(0,01\text{m})^3} = 8,9 \frac{10^{-3}\text{kg}}{(10^{-2}\text{m})^3} = 8,9 \frac{10^{-3}}{10^{-6}} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 8,9 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 8,9 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Obliczamy długość drutu:

$$L = \frac{17,8\text{kg}}{\pi \cdot (10^{-3}\text{m})^2 \cdot 8,9 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = \frac{17,8}{\pi \cdot 8,9 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = \frac{2}{\pi \cdot 10^{-3}} \frac{1}{\frac{1}{\text{m}}} = \frac{2 \cdot 10^3}{\pi} \text{m}$$

$$L = 637\text{m}$$

Zadanie 1.9 Ile wynosi masa Ziemi, jeśli przyspieszenie ziemskie na jej powierzchni ma wartość $9,81 \text{ m/s}^2$, promień Ziemi równa się 6400 km , a stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$? Jaka jest średnia gęstość Ziemi (w kg/dm^3)?

Rozwiązanie:

Prawo powszechnego ciążenia opisujące siłę F oddziaływania między dwoma ciałami wyraża się wzorem:

$$F = G \frac{mM}{R^2},$$

gdzie:

M, m – masy ciał

R – odległość środków ciał

G – stała grawitacji

Z prawa tego wynika, że przyspieszenie grawitacyjne ciała na powierzchni Ziemi opisane jest wzorem:

$$g = \frac{F}{m} = \frac{G \frac{mM}{R^2}}{m} = G \frac{M}{R^2},$$

gdzie M i R oznaczają odpowiednio masę i promień Ziemi. Przekształcamy wzór aby otrzymać wyrażenie na masę Ziemi:

$$g \cdot R^2 = GM$$

$$M = \frac{g \cdot R^2}{G}$$

Obliczamy masę Ziemi:

$$M = \frac{9,81 \frac{m}{s^2} \cdot (6400km)^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}} = \frac{9,81 \frac{m}{s^2} \cdot (6,4 \cdot 10^6 m)^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}} = \frac{9,81 \cdot 40,96 \cdot 10^{12}}{6,67 \cdot 10^{-11}} kg =$$

$$= 60,2 \cdot 10^{12} \cdot 10^{11} kg = 6,02 \cdot 10^{24} kg$$

Wyprowadzenie jednostek:

$$\left[\frac{\frac{m}{s^2} \cdot m^2}{\frac{Nm^2}{kg^2}} = \frac{m^3}{s^2} \cdot \frac{kg^2}{Nm^2} = \frac{mkg^2}{s^2 N} = \frac{mkg^2}{s^2 \cdot \frac{kgm}{s^2}} = kg \right]$$

Gęstość Ziemi (traktowanej jako kula) wyraża się wzorem:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Podstawiamy dane:

$$\rho = \frac{3 \cdot 6,02 \cdot 10^{24} kg}{4 \cdot 3,14 \cdot (6400km)^3} = \frac{18,06 \cdot 10^{24} kg}{12,59 \cdot (6,4 \cdot 10^6 m)^3} = \frac{18,06}{12,59 \cdot 262,1} \cdot \frac{10^{24} kg}{10^{18} m^3} = 0,00549 \cdot 10^6 \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho = 5,49 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} = 5,49 \cdot \frac{10^3 kg}{(10dm)^3} = 5,49 \cdot \frac{10^3 kg}{10^3 dm^3} = 5,49 \frac{kg}{dm^3}$$

Zadanie 1.10 Ile kropli deszczu o promieniu 2 mm spadnie z chmury zawierającej 30 m³ wody ?

Rozwiązanie:

Promień kropli przeliczamy na metry:

$$R = 2mm = 0,002m = 2 \cdot 10^{-3} m$$

Objętość pojedynczej kropli:

$$V_{kr} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot (2 \cdot 10^{-3} m)^3 = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 8}{3} \cdot 10^{-9} m^3 = 33,5 \cdot 10^{-9} m^3 = 3,35 \cdot 10^{-8} m^3$$

Jeśli objętość całej wody V podzielimy przez objętość jednej kropli V_{kr} to otrzymamy liczbę kropli n :

$$n = \frac{V}{V_{kr}} = \frac{30m^3}{3,35 \cdot 10^{-8} m^3} = 8,96 \cdot 10^8 \approx 9 \cdot 10^8 = 900 \cdot 10^6$$

Zadanie 1.11 Jakie ciśnienie wywiera kobieta o masie 60 kg na podłogę w chwili gdy stoi na okrągłym obcasie jednego buta o promieniu 1,5 cm? Porównaj ten wynik z ciśnieniem atmosferycznym. Przyjąć $g = 10 \text{ m/s}^2$, ciśnienie atmosferyczne $p_o = 1000 \text{ hPa}$.

Rozwiązanie:

Pole powierzchni obcasa jest równe polu powierzchni koła:

$$S = \pi R^2$$

Działająca siła jest równa ciężarowi kobiety:

$$F = m \cdot g$$

Ciśnienie jest równe stosunkowi siły działającej prostopadle do podłoża do jego powierzchni.:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{mg}{\pi R^2}$$

$$p = \frac{60kg \cdot 10 \frac{m}{s^2}}{3,14 \cdot (1,5cm)^2} = \frac{600N}{3,14 \cdot (1,5 \cdot 10^{-2} m)^2} = \frac{600N}{3,14 \cdot 2,25 \cdot 10^{-4} m^2} = \frac{60 \cdot 10 \cdot 10^4}{7,065} \frac{N}{m^2} = 8,5 \cdot 10^5 Pa$$

Ciśnienie atmosferyczne:

$$p_o = 1000hPa = 10^3 \cdot 10^2 Pa = 10^5 Pa$$

Stosunek wywieranego ciśnienia do ciśnienia atmosferycznego jest równy:

$$\frac{p}{p_o} = \frac{8,5 \cdot 10^5 Pa}{10^5 Pa} = 8,5$$

Zatem:

$$p = 8,5 \cdot p_o$$

2. Wektory

Zadanie 2.1 Wykonaj operacje na wektorach metodą rachunkową. Wielkości wektorowe opisano pogrubioną czcionką.

- $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ($\mathbf{A} = [3, 5]$, $\mathbf{B} = [2, 1]$)
- $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ($\mathbf{A} = [3, 2]$, $\mathbf{B} = [5, 1]$)
- $3\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = [3, 4]$)
- $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ ($\mathbf{A} = [1, 2]$, $\mathbf{B} = [2, 1]$, $\mathbf{C} = [3, 2]$)
- $\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}$ ($\mathbf{A} = [6, 3, 1]$, $\mathbf{B} = [5, 1, 2]$, $\mathbf{C} = [2, 2, 3]$)

Rozwiązanie:

- Dodawanie wektorów polega na dodawaniu do siebie odpowiednich składowych poszczególnych wektorów. Każdy wektor można przedstawić za pomocą składowych, będącymi rzutami danego wektora na osie układu współrzędnych. W zadaniu występują wektory opisane w kartezjańskim prostokątnym układzie współrzędnych, których składowe zawierają się kolejno w osiach x , y oraz z . Operację dodawania wektorów można zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z]$$

Wektory w przykładzie (a) posiadają po dwie składowe. Są to wektory leżące w jednej płaszczyźnie XY . Podstawiając dane z zadania otrzymamy:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [3 + 2, 5 + 1] = [5, 6]$$

- Odejmowanie wektorów polega na odejmowaniu od siebie odpowiednich składowych poszczególnych wektorów. Operację odejmowania wektorów można zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = [A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z]$$

Wektory w przykładzie (b) posiadają po dwie składowe. Są to wektory leżące w jednej płaszczyźnie XY . Podstawiając dane z zadania otrzymamy:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = [3 - 5, 2 - 1] = [-2, 1]$$

- Mnożenie lub dzielenie wektora przez liczbę n (skalar) polega na wymnożeniu lub podzieleniu przez daną liczbę kolejnych składowych wektora. Operację mnożenia/dzielenia wektora przez skalar n można zapisać w następujący sposób:

$$n\mathbf{A} = [n \cdot A_x, n \cdot A_y, n \cdot A_z]$$

Wektor w przykładzie (c) posiada dwie składowe. Jest to wektor leżący w płaszczyźnie XY. Podstawiając dane z zadania otrzymamy:

$$3\mathbf{A} = [3 \cdot 3, 3 \cdot 4,] = [9, 12]$$

- d) Dodawanie wektorów polega na dodawaniu do siebie odpowiednich składowych poszczególnych wektorów. Można dodawać do siebie dowolną liczbę wektorów. Operację dodawania trzech wektorów można zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = [A_x + B_x + C_x, A_y + B_y + C_y, A_z + B_z + C_z]$$

Wektory w przykładzie (d) posiadają po dwie składowe. Są to wektory leżące w jednej płaszczyźnie XY. Podstawiając dane z zadania otrzymamy:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = [1 + 2 + 3, 2 + 1 + 2] = [6, 5]$$

- e) Dodawanie/odejmowanie wektorów polega na dodawaniu/odejmowaniu odpowiednich składowych poszczególnych wektorów. Można dodawać/odejmować dowolną liczbę wektorów oraz wykonywać te operacje jednocześnie lub etapami. Operację dodawania/odejmowania trzech wektorów można zapisać ogólnie w następujący sposób:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} \pm \mathbf{C} = [A_x \pm B_x \pm C_x, A_y \pm B_y \pm C_y, A_z \pm B_z \pm C_z]$$

Wektory w przykładzie (e) posiadają po trzy składowe. Są to wektory leżące w przestrzeni trójwymiarowej XYZ. Podstawiając dane z zadania otrzymamy:

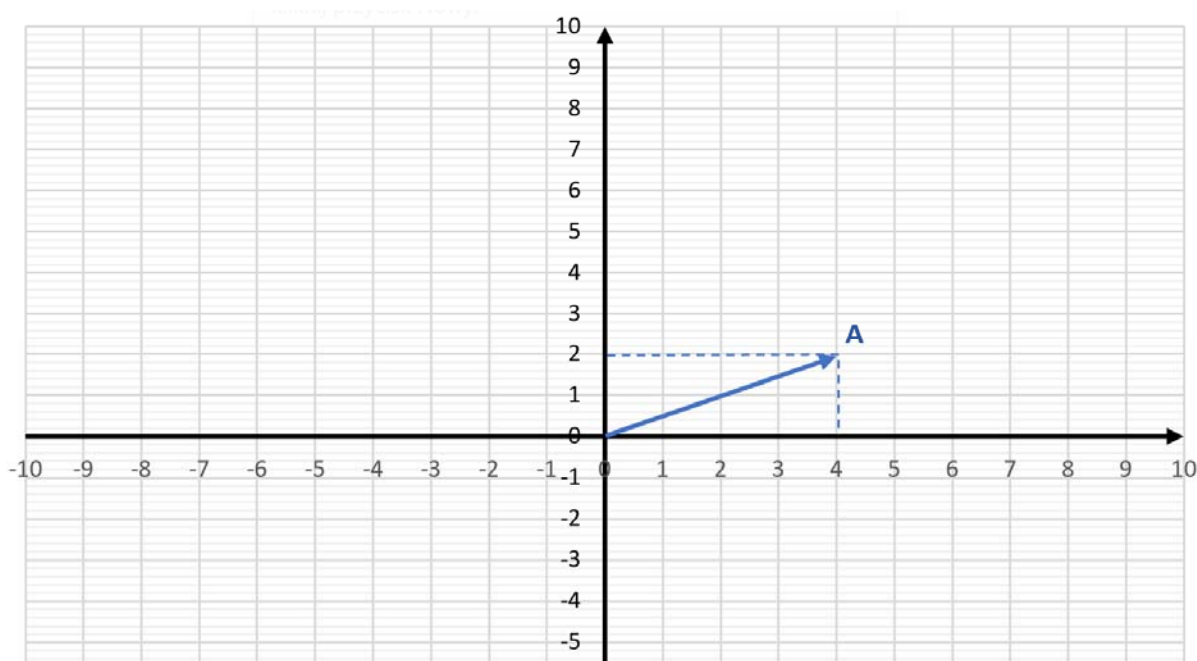
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C} = [6 - 5 + 2, 3 - 1 + 2, 1 - 2 + 3] = [3, 4, 2]$$

Zadanie 2.2 Dane są dwa wektory: $\mathbf{A} = [4, 2]$, $\mathbf{B} = [3, 4]$. Przedstaw wektory oraz wykonaj operacje na wektorach metodą graficzną. Wielkości wektorowe opisano pogrubioną czcionką.

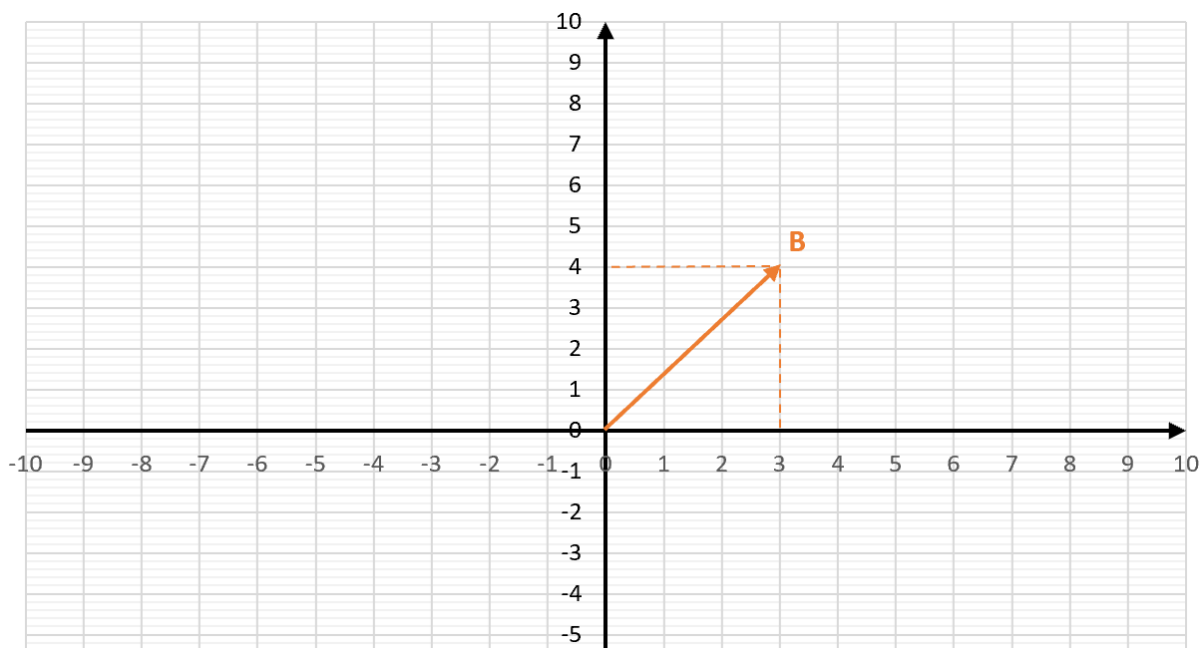
- $\mathbf{A}$
- $\mathbf{B}$
- $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
- $-\mathbf{B}$
- $\mathbf{A} - \mathbf{B}$
- $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$

Rozwiązanie:

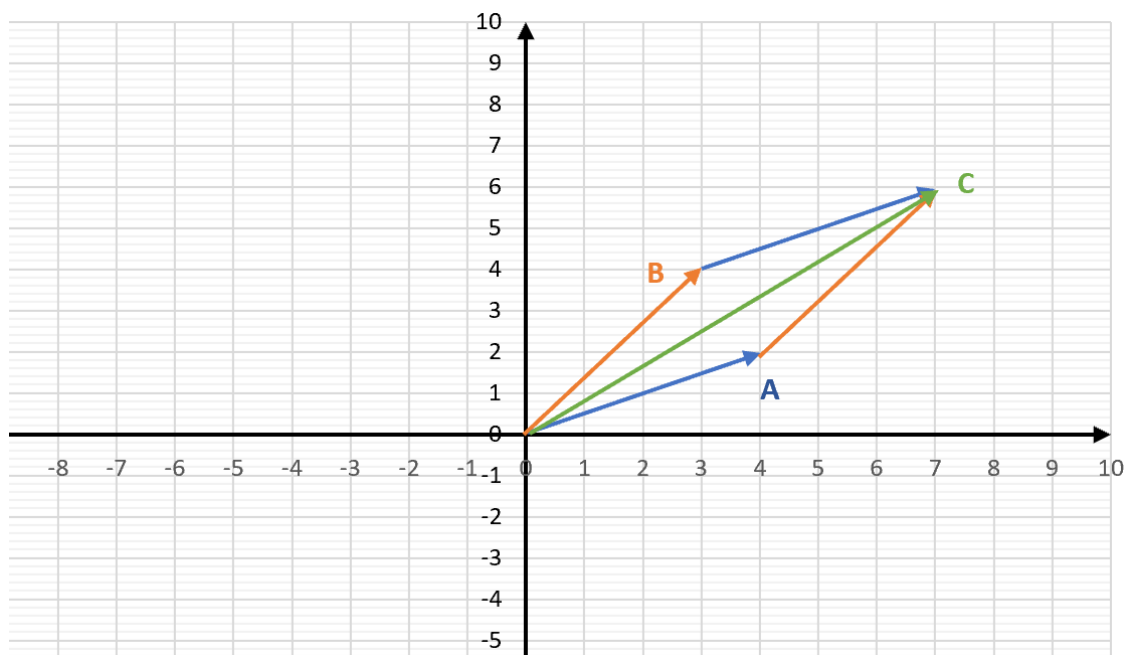
- a) Aby narysować wektor **A**, należy w prostokątnym kartezjańskim układzie współrzędnych zaznaczyć punkt o współrzędnych (4, 2). W tym celu na osi odciętych (oś x) odszukujemy na podziałce cyfrę 4 i rysujemy pionową oś pomocniczą cienką przerywaną linią. Na osi rzędnych (oś y) odszukujemy cyfrę 2 i rysujemy poziomą oś pomocniczą cienką przerywaną linią. Początek wektora **A** ma współrzędne (0,0). Jest to początek układu współrzędnych. Punkt końcowy ma współrzędne (4,2). Jest to miejsce przecięcia się narysowanych osi pomocniczych. Pomiędzy punktami rysujemy strzałkę, tak aby jej grot stykał się z punktem końcowym.



- b) Aby narysować wektor **B**, należy w prostokątnym kartezjańskim układzie współrzędnych zaznaczyć punkt o współrzędnych (3, 4). W tym celu na osi odciętych (oś x) odszukujemy na podziałce cyfrę 3 i rysujemy pionową oś pomocniczą cienką przerywaną linią. Na osi rzędnych (oś y) odszukujemy cyfrę 4 i rysujemy poziomą oś pomocniczą cienką przerywaną linią. Początek wektora **B** ma współrzędne (0,0). Jest to początek układu współrzędnych. Punkt końcowy ma współrzędne (3,4). Jest to miejsce przecięcia się narysowanych osi pomocniczych. Pomiędzy punktami rysujemy strzałkę, tak aby jej grot stykał się z punktem końcowym.

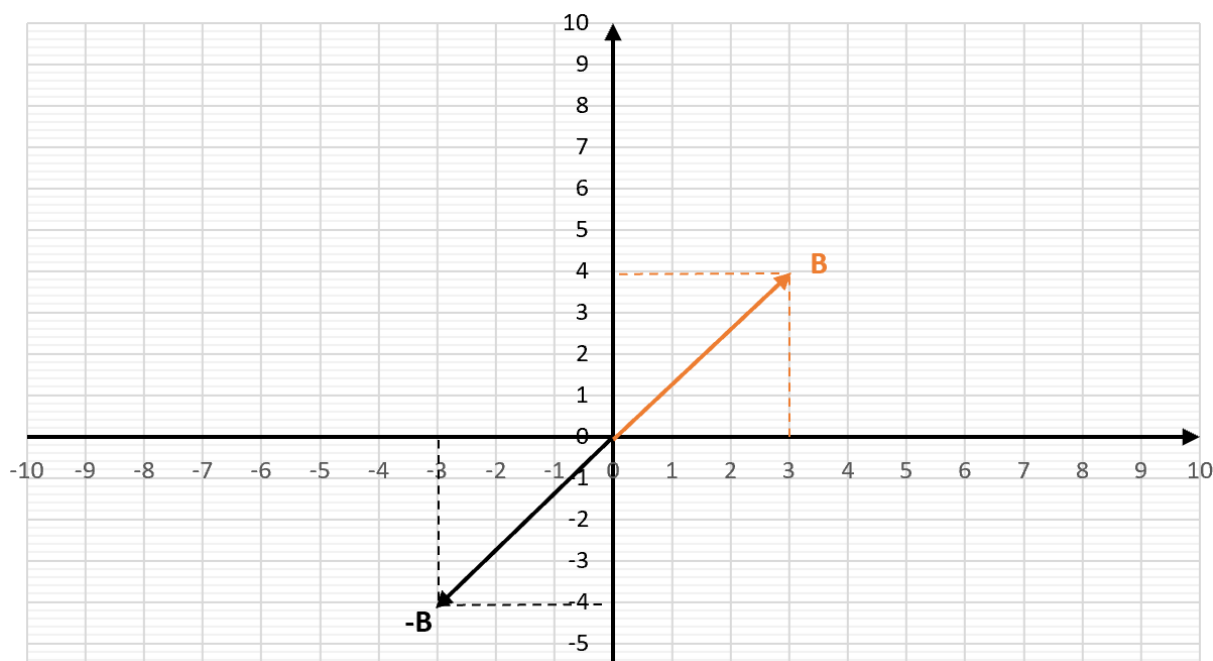


c) Graficzne dodawanie wektorów polega na wykorzystaniu tzw. metody równoległoboku. Pierwszym etapem jest narysowanie w układzie współrzędnych dwóch wektorów, które chcemy dodać. Następnie do punktu końcowego wektora **A** przenosimy strzałkę odpowiadającą wektorowi **B** z zachowaniem jego pierwotnej długości oraz kąta nachylenia względem poziomu. Analogicznie do punktu końcowego wektora **B** przenosimy strzałkę odpowiadającą wektorowi **A**. Zamknięta figura tworzy równoległobok.



Wektor **C** powstały przez dodanie wektorów **A** i **B** rysujemy po przekątnej równoległoboku wychodząc z początku układu współrzędnych.

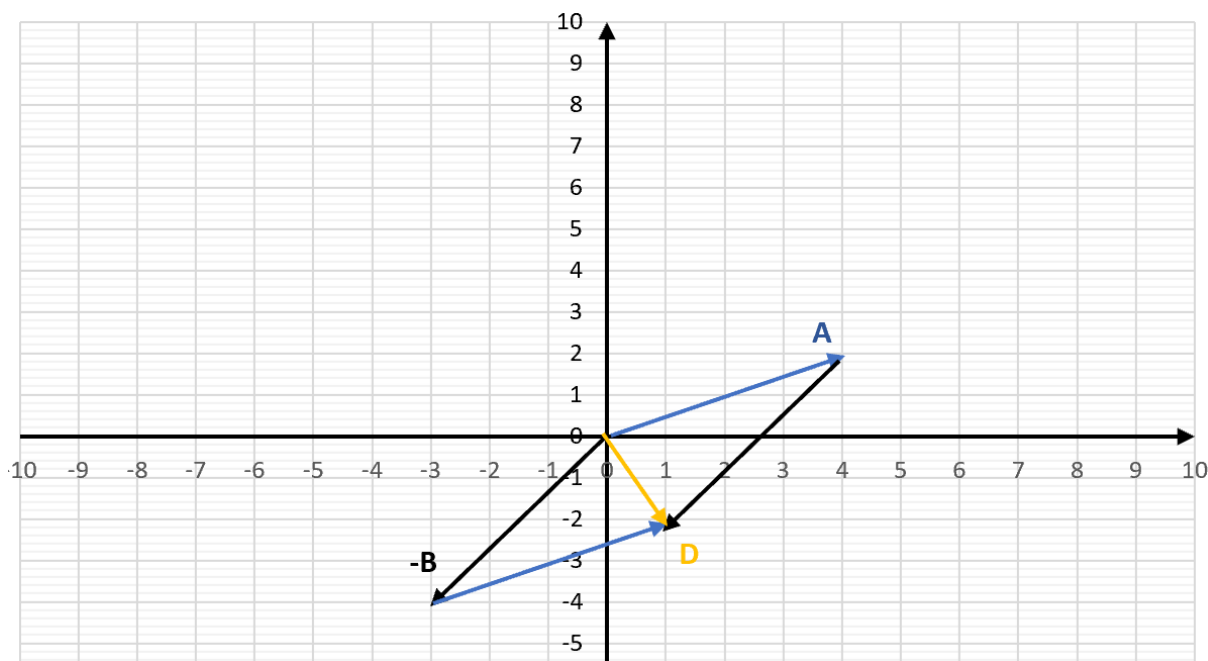
- d) Wektor przeciwny do wektora pierwotnego to wektor o przeciwnym zwrocie i takim samym module (długości) i kierunku. Rachunkowo otrzymalibyśmy taki wektor mnożąc składowe wektora pierwotnego przez -1 .



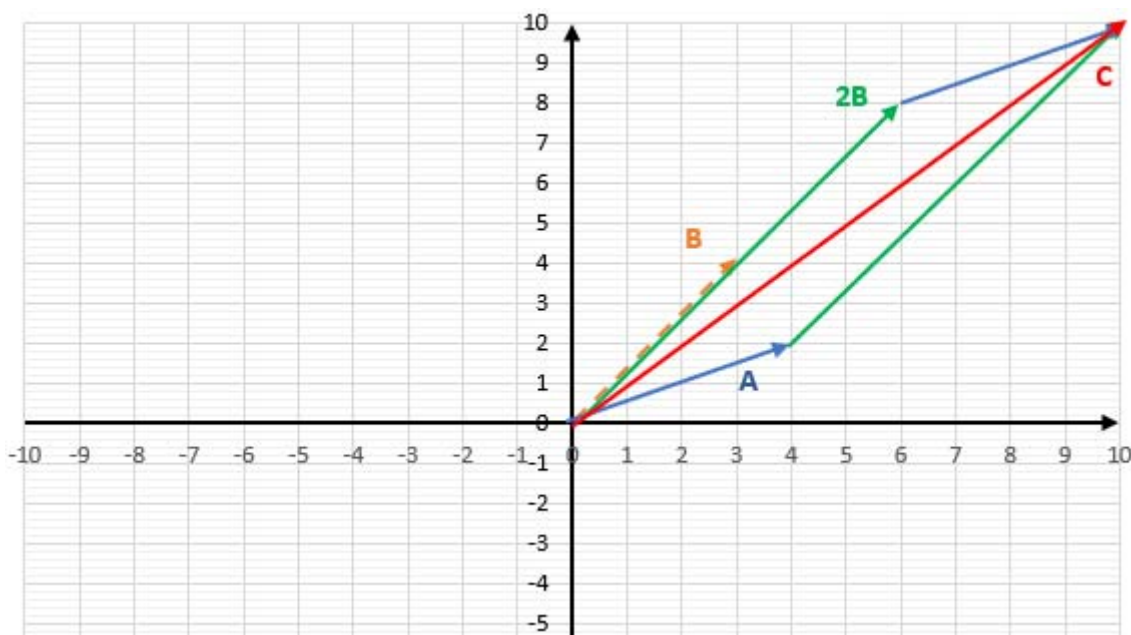
- e) Graficzne odejmowanie wektorów polega na wykorzystaniu tzw. metody równoległoboku. Odejmowanie należy traktować jako dodawanie jednego wektora do wektora przeciwnego względem drugiego wektora:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Pierwszym etapem jest narysowanie w układzie współrzędnych dwóch wektorów, które chcemy odejmować (dodać). Następnie do punktu końcowego wektora **A** przenosimy strzałkę odpowiadającą wektorowi $-\mathbf{B}$ z zachowaniem jest pierwotnej długości oraz kąta nachylenia względem poziomu. Analogicznie do punktu końcowego wektora $-\mathbf{B}$ przenosimy strzałkę odpowiadającą wektorowi **A**. Zamknięta figura tworzy równoległobok. Wektor **D** powstały przez odejmowanie wektorów **A** i **B** rysujemy po przekątnej równoległoboku wychodząc z początku układu współrzędnych.



- f) Graficzne dodawanie wektorów polega na wykorzystaniu tzw. metody równoległoboku. Pierwszym etapem jest narysowanie w układzie współrzędnych dwóch wektorów, które chcemy dodać. Graficzne mnożenie wektora przez liczbę (skalar) n polega na narysowaniu nowego wektora o takim samym kierunku oraz zwrocie (w przypadku liczby nieujemnej) jak wektor pierwotny, lecz posiadającym inny moduł (długość). W przypadku mnożenia długość nowego wektora ulega n -krotnemu zwiększeniu. Do punktu końcowego wektora **A** przenosimy strzałkę odpowiadającą wektorowi $2\mathbf{B}$ z zachowaniem jego długości oraz kąta nachylenia względem poziomu. Analogicznie do punktu końcowego wektora $2\mathbf{B}$ przenosimy strzałkę odpowiadającą wektorowi **A**. Zamknięta figura tworzy równoległobok. Wektor **C** powstały przez dodanie wektorów **A** i $2\mathbf{B}$ rysujemy po przekątnej równoległoboku wychodząc z początku układu współrzędnych.



Zadanie 2.3 Oblicz długość opisanych poniżej wektorów. Wielkości wektorowe opisano pogrubioną czcionką.

- a) **A** = [3, 4]
- b) **B** = 10i + 5j
- c) **C** = [-2, 4, 6]
- d) **D** = 5i - 2k

Rozwiązanie:

- a) Aby wyznaczyć długość wektora na podstawie jego współrzędnych (składowych), należy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa. Twierdzenie to brzmi: Jeśli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych a oraz b jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej c . W zadaniu 2.2 zademonstrowano, iż wektor na płaszczyźnie tworzy ze swoją składową poziomą oraz pionową trójkąt prostokątny. Stosując i przekształcając równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa:

$$A = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Podstawiając wartości składowych wektora **A** jego długość wynosi:

$$A = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

- b) Aby wyznaczyć długość wektora na podstawie jego współrzędnych (składowych), należy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa. Twierdzenie to

brzmi: Jeśli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych a oraz b jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej c . W zadaniu 2.2 zademonstrowano, iż wektor na płaszczyźnie tworzy ze swoją składową poziomą oraz pionową trójkąt prostokątny. Stosując i przekształcając równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa:

$$B = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Wektor **B** został opisany za pomocą wektorów jednostkowych. Wektory jednostkowe (wersory) **i**, **j**, **k** mają długość równą 1. W zapisie wektorów służą do przypisania poszczególnych składowych wektora do danej osi układu współrzędnych, odpowiednio x , y , z . Podstawiając wartości składowych wektora **B** jego długość wynosi:

$$B = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$$

- c) Aby wyznaczyć długość wektora na podstawie jego współrzędnych (składowych), należy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa. Twierdzenie to brzmi: Jeśli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych a oraz b jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej c . W zadaniu 2.2 oraz 2.3 zademonstrowano, iż wektor na płaszczyźnie tworzy ze swoją składową poziomą oraz pionową trójkąt prostokątny. Wektor **C** jest wektorem w przestrzeni trójwymiarowej posiadającym 3 składowe zawierające się odpowiednio w osiach x , y , z . Aby wyznaczyć długość takiego wektora, twierdzenie Pitagorasa należy zastosować dwukrotnie. Pierwszy raz w płaszczyźnie xy w celu wyznaczenia długości jednej z przyprostokątnych trójkąta prostego jaki tworzy ze składowymi trójwymiarowy wektor. Drugi raz twierdzenie Pitagorasa stosuje się w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny xy (i równoległej do osi z) w celu wyznaczenia długości drugiej przyprostokątnej. Ogólny wzór na długość wektora w przestrzeni trójwymiarowej ma zatem postać:

$$C = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Podstawiając wartości składowych wektora **C** jego długość wynosi:

$$C = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

d) Aby wyznaczyć długość wektora na podstawie jego współrzędnych (składowych), należy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa. Twierdzenie to brzmi: Jeśli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych a oraz b jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej c . W zadaniu 2.2 oraz 2.3 zademonstrowano, iż wektor na płaszczyźnie tworzy ze swoją składową poziomą oraz pionową trójkąt prostokątny. Wektor $\mathbf{D}$ jest wektorem w przestrzeni trójwymiarowej posiadającym 2 niezerowe składowe zawierające się odpowiednio w osiach x oraz z . Aby wyznaczyć długość takiego wektora, twierdzenie Pitagorasa należy zastosować dwukrotnie. Pierwszy raz w płaszczyźnie xy w celu wyznaczenia długości jednej z przyprostokątnych trójkąta prostego jaki tworzy ze składowymi trójwymiarowy wektor. Drugi raz twierdzenie Pitagorasa stosuje się w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny xy (i równoległej do osi z) w celu wyznaczenia długości drugiej przyprostokątnej. Ogólny wzór na długość wektora w przestrzeni trójwymiarowej ma postać:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Wektor $\mathbf{D}$ został opisany za pomocą wektorów jednostkowych. Wektory jednostkowe (wersory) $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ mają długość równą 1. W zapisie wektorów służą do przypisania poszczególnych składowych wektora do danej osi układu współrzędnych, odpowiednio x , y , z . Podstawiając wartości składowych wektora $\mathbf{D}$ jego długość wynosi:

$$D = \sqrt{(5)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

3. Kinematyka punktu materialnego

Zadanie 3.1 Wyznacz czas (w sekundach) jaki jest potrzebny do przebycia odcinka drogi $s = 120$ m przez pojazd, który porusza się z prędkością $v = 108$ km/h.

Rozwiązanie:

Aby obliczyć czas t potrzebny do przebycia odcinka drogi $s = 120$ m przez pojazd poruszający się z szybkością $v = 108$ km/h, należy najpierw przeliczyć szybkość na jednostki SI (metry na sekundę):

$$[v] = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 108 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Następnie korzystamy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnym:

$$s = v \cdot t$$

Przekształcamy ten wzór. Aby znaleźć czas t , dzielimy obie strony równania przez v

$$s = v \cdot t \quad | : v$$

W ten sposób otrzymujemy wzór:

$$t = \frac{s}{v}$$

Podstawiamy dane do wzoru na czas t :

$$t = \frac{s}{v} = \frac{120 \text{ m}}{30 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 4 \text{ s}$$

Odpowiedź: Czas potrzebny do przebycia odcinka $s=120 \text{ m}$ wynosi 4 sekundy.

Zadanie 3.2 Pojazd pokonał trasę w czasie 3 godzin, poruszając się ze średnią prędkością 60 km/h. Oblicz, z jaką średnią prędkością musiałyby pokonać tę samą trasę, aby skrócić czas podróży do 2 godzin i 24 minut.

Rozwiązanie:

Dane z zadania:

Średnia prędkość pojazdu $v_1 = 60 \text{ km/h}$

Czas $t_1 = 3 \text{ h}$

Czas $t_2 = 2 \text{ h } 24 \text{ min}$, który musimy wyrazić w godzinach:

$$t_2 = 2 \text{ h} + \frac{24 \text{ min}}{60} = 2 \text{ h} + 0,4 \text{ h} = 2,4 \text{ h}$$

Szukamy średniej prędkości v_2 , z jaką pojazd musiałyby przejechać tę samą trasę w czasie t_2 .

Trasa s jest taka sama w obu przypadkach i można ją wyznaczyć z równania drogi w ruchu jednostajnym:

$$s = v_1 \cdot t_1$$

Aby wyznaczyć v_2 korzystamy z definicji ruchu jednostajnego:

$$v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{v_1 \cdot t_1}{t_2}$$

Podstawiamy znane wartości:

$$v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{v_1 \cdot t_1}{t_2} = \frac{60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 3 \text{ h}}{2,4 \text{ h}} = 75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Odpowiedź: Pojazd musiałby poruszać się ze średnią szybkością 75 km/h, aby pokonać trasę s w czasie 2 godzin i 24 minut.

Zadanie 3.3 Dwa miasta oddalone są od siebie o 300 km. Z każdego z nich jednocześnie wyruszają pociągi w kierunku drugiego miasta. Prędkości pociągów wynoszą odpowiednio $v_1 = 100$ km/h oraz $v_2 = 50$ km/h. Oblicz, jaką drogę pokona każdy z pociągów do momentu ich spotkania.

Rozwiązanie:

Dane z zadania:

Odległość między miastami $s=300$ km,

Prędkość pierwszego pociągu $v_1=100$ km/h,

Prędkość drugiego pociągu $v_2=50$ km/h.

Szukamy odległości s_1 oraz s_2 przebyte przez oba pociągi do momentu spotkania po czasie t .

Pociągi spotkają się w chwili t , a drogi przebyte przez oba pociągi wynoszą:

$$s_1 = v_1 \cdot t \text{ (droga pierwszego pociągu),}$$

$$s_2 = v_2 \cdot t \text{ (droga drugiego pociągu).}$$

W chwili spotkania suma tych dróg musi równać się całkowitej odległości między miastami:

$$s = s_1 + s_2.$$

Podstawiamy wyrażenia na s_1 oraz s_2 do równania:

$$s = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t$$

Wyłączamy t przed nawias jako wspólny czynnik:

$$s = t \cdot (v_1 + v_2)$$

Dzielimy obie strony równania przez $(v_1 + v_2)$, aby otrzymać czas t , w którym spotkają się oba pociągi:

$$t = \frac{s}{(v_1 + v_2)}$$

Znając czas t możemy znaleźć drogi przebyte przez oba pociągi podstawiając powyższą zależność do wzorów na s_1 oraz s_2 :

$$s_1 = v_1 \frac{s}{v_1 + v_2}$$

$$s_2 = v_2 \frac{s}{v_1 + v_2}$$

Podstawmy wartości do powyższych wzorów:

$$s_1 = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{300 \text{ km}}{100 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{300 \text{ km}}{150 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 200 \text{ km}$$

$$s_2 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{300 \text{ km}}{100 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{300 \text{ km}}{150 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 100 \text{ km}$$

Odpowiedź: Do chwili spotkania pierwszy pociąg przebędzie 200 km, a drugi pociąg przebędzie 100 km.

Zadanie 3.4 Wyznacz prędkość motorówki w stojącej wodzie, jeśli podczas płynięcia z prądem rzeki jej prędkość względem brzegu wynosi 6 m/s, a podczas płynięcia pod prąd 4 m/s. Oblicz również prędkość prądu rzeki.

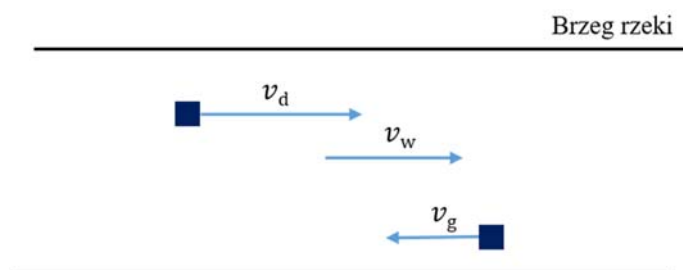
Rozwiązanie:

Dane z zadania:

Prędkość motorówki na wodzie względem brzegu z prądem rzeki $v_d = 6 \text{ m/s}$,

Prędkość motorówki na wodzie względem brzegu pod prąd $v_g = 4 \text{ m/s}$.

Szukamy prędkości motorówki na stojącej wodzie v_m oraz prędkości prądu rzeki v_w .



W przypadku ruchu z prądem rzeki, prędkość względem brzegu jest sumą prędkości motorówki na stojącej wodzie i prądu rzeki:

$$v_d = v_m + v_w$$

W przypadku ruchu pod prąd, prędkość względem brzegu jest różnicą prędkości motorówki na stojącej wodzie i prądu rzeki:

$$v_g = v_m - v_w$$

Z powyższych zależności dostajemy układ równań z dwiema niewiadomymi.

$$\begin{cases} v_d = v_m + v_w \\ v_g = v_m - v_w \end{cases}$$

Po dodaniu stronami otrzymujemy:

$$v_d + v_g = 2v_m$$

Dzielimy obie strony przez 2 i otrzymamy wzór na prędkość motorówki na stojącej wodzie v_m

$$v_m = \frac{v_d + v_g}{2}$$

Teraz v_m wystarczy podstawić do któregośkolwiek równania wchodzącego do układu, aby wyznaczyć prędkości prądu rzeki v_w

$$v_d = \frac{v_d + v_g}{2} + v_w \quad | \cdot 2$$

$$2v_d = v_d + v_g + 2v_w \quad | - (v_d + v_g)$$

$$2v_d - v_d - v_g = 2v_w$$

$$2v_w = v_d - v_g \quad | : 2$$

$$v_w = \frac{v_d - v_g}{2}$$

Podstawiamy wartości do obu równań

$$v_m = \frac{v_d + v_g}{2} = \frac{6 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_w = \frac{v_d - v_g}{2} = \frac{6 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkość motorówki na stojącej wodzie wynosi $v_m = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a prędkość prądu w rzece $v_w = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Zadanie 3.5 Oblicz drogę przebytą przez ciało w trzeciej sekundzie ruchu, jeśli porusza się ono z przyspieszeniem $a = 2 \text{ m/s}^2$ bez prędkości początkowej.

Rozwiązanie:

Dane z zadania:

Przyspieszenie: $a = 2 \text{ m/s}^2$,

Prędkość początkowa $v_0 = 0 \text{ m/s}$.

Interesuje nas droga przebyta w trzeciej sekundzie Δs .

Drogę przebytą przez ciało bez prędkości początkowej w dowolnym czasie t można obliczyć ze wzoru:

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

Droga przebyta w trzeciej sekundzie będzie różnicą dróg przebytych do końca trzech sekund oraz do końca dwóch sekund

$$\Delta s = s_3 - s_2$$

Gdzie $s_3 = \frac{1}{2}at_3^2$, zaś $t_3 = 3s$

Oraz $s_2 = \frac{1}{2}at_2^2$, zaś $t_2 = 2s$.

$$\Delta s = \frac{1}{2}at_3^2 - \frac{1}{2}at_2^2$$

Podstawiając znane wartości do wzoru otrzymujemy

$$\Delta s = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3\text{s})^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2\text{s})^2 = 9\text{m} - 4\text{m} = 5\text{m}$$

Odpowiedź: W trzeciej sekundzie ruchu ciało przebyło 5 m.

Zadanie 3.6 Oblicz drogę przebytą przez ciało w piątej i szóstej sekundzie ruchu jednostajnie przyspieszonego, jeśli jego prędkość po upływie 3 sekund wynosi $v = 4 \text{ m/s}$, a początkowa prędkość jest równa zero.

Rozwiązanie:

Dane z zadania:

Prędkość po czasie $t = 3 \text{ s}$: $v = 4 \text{ m/s}$,

Prędkość początkowa $v_0 = 0 \text{ m/s}$,

Szukamy drogi przebytej w piątej i szóstej sekundzie ruchu Δs .

W ruchu jednostajnie przyspieszonym prędkość końcowa v wyraża się wzorem:

$$v = v_0 + at$$

Ponieważ $v_0 = 0$ otrzymujemy $v = at$. przekształcamy ten wzór, aby otrzymać a :

$$v = at \quad | : t$$

$$a = \frac{v}{t}$$

Przebyta droga po czasie $t_4 = 4 \text{ s}$:

$$s_4 = v_0 t + at_4^2$$

Przebyta droga na końcu szóstej sekundy ($t_6 = 6 \text{ s}$):

$$s_6 = v_0 t + at_6^2$$

Droga przebyta w piątej i szóstej sekundzie będzie różnicą przebytych dróg s_6 i s_4 :

$$\Delta s = \frac{1}{2} a t_6^2 - \frac{1}{2} a t_4^2$$

Podstawiamy znaleziony wcześniej wzór na a

$$\Delta s = \frac{1}{2} \frac{v}{t} t_6^2 - \frac{1}{2} \frac{v}{t} t_4^2$$

$$\Delta s = \frac{1}{2} \frac{v}{t} (t_6^2 - t_4^2)$$

Na koniec podstawiamy znane wartości

$$\Delta s = \frac{1}{2} \frac{v}{t} (t_6^2 - t_4^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \text{s}} \cdot ((6\text{s})^2 - (4\text{s})^2) = \frac{2 \text{m}}{3 \text{s}^2} \cdot (36\text{s}^2 - 16\text{s}^2) = \frac{40}{3} \text{m} \approx 13,3 \text{m}$$

Odpowiedź: Ciało w piątej i szóstej sekundzie ruchu przebyło drogę $\Delta s = 13,3 \text{ m}$.

Zadanie 3.7 Oblicz opóźnienie łyżwiarza, który z prędkością początkową $v_0 = 10 \text{ m/s}$ zatrzymał się po pokonaniu drogi $s = 50 \text{ m}$.

Rozwiązanie:

Dane z zadania:

Prędkość początkowa $v_0 = 10 \text{ m/s}$,

Prędkość końcowa $v = 0 \text{ m/s}$ (ponieważ łyżwiarz zatrzymuje się),

Droga $s = 50 \text{ m}$.

Szukamy wartości opóźnienia a .

Z kinematyki znamy dwa podstawowe równania:

1. Zależność prędkości od przyspieszenia:

$$v = v_0 + at$$

2. Zależność drogi od czasu:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Najpierw wyznaczamy czas t z pierwszego równania:

$$v = v_0 + at \quad | - v_0$$

$$v - v_0 = at \quad | : a$$

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

Podstawiamy t do drugiego równania:

$$s = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 = \frac{v_0(v - v_0)}{a} + \frac{a(v - v_0)^2}{2a^2}$$

Sprowadzamy do wspólnego mianownika:

$$s = \frac{2v_0(v - v_0)}{2a} + \frac{(v - v_0)^2}{2a} = \frac{2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2}{2a} = \frac{(v - v_0)[2v_0 + (v - v_0)]}{2a} =$$

$$= \frac{(v - v_0)[2v_0 + v - v_0]}{2a} = \frac{(v - v_0)(v + v_0)}{2a}$$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

Otrzymany wzór przekształcamy w ten sposób aby otrzymać a :

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad | \cdot 2a$$

$$2sa = v^2 - v_0^2 \quad | : s$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

Na koniec podstawiamy znane wartości do otrzymanego wzoru:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{\left(0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 50\text{m}} = \frac{-100 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{100\text{m}} = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Wynik przyspieszenia jest ujemny, ponieważ mamy do czynienia z opóźnieniem.

Odpowiedź: Łyżwiarz poruszał się z opóźnieniem $a = -1 \text{ m/s}^2$.

Zadanie 3.8 Z jakiej wysokości musi spaść ciało, aby osiągnęło prędkość 72 km/h tuż przed uderzeniem o ziemię?

Rozwiązanie:

Dane z zadania:

Prędkość końcowa ciała $v = 72 \text{ km/h}$,

Przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \text{ m/s}^2$,

Szukamy wysokość z jakiej musi spaść ciało h .

Rozwiążmy to zadanie z wykorzystaniem zasad swobodnego spadku, gdzie przyspieszenie ciała wynika z grawitacji.

W ruchu jednostajnie zmiennym znamy dwa podstawowe równania:

1. Zależność prędkości od przyspieszenia, tu od przyspieszenia ziemskiego g :

$$v = v_0 + gt$$

2. Zależność drogi (w tym przypadku wysokości) od czasu:

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Ze względu na to, że w swobodnym spadku prędkość początkowa $v_0 = 0$ to otrzymujemy:

$$v = g t$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

Pierwsze równanie przekształcamy w ten sposób, aby otrzymać wzór na czas t :

$$v = g t \quad | : g$$

$$t = \frac{v}{g}$$

Kolejnym krokiem jest podstawienie t do wzoru na wysokość h :

$$h = \frac{1}{2} g \left(\frac{v}{g} \right)^2 = \frac{1}{2} g \frac{v^2}{g^2} = \frac{v^2}{2g}$$

Zanim podstawimy znane wartości do wzoru uzgodnimy jednostki. Wyrażmy prędkość końcową v w m/s:

$$[v] = 70 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 70 \cdot \frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Teraz podstawiamy znane wartości do otrzymanego wzoru na wysokość h :

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{400 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 20,39\text{m}$$

Odpowiedź: Ciało musiałoby spaść z wysokości około 20,39 m, aby osiągnąć prędkość 72 km/h.

Zadanie 3.9 Oblicz prędkość końcową ciała poruszającego się ruchem jednostajnie przyspieszonym, jeśli w czasie $t = 10$ s pokonało drogę $s = 100$ m.

Rozwiązanie:

Dane z zadania:

Czas trwania ruchu $t = 10$ s,

Droga jaką pokonało ciało $s = 100$ m,

Prędkość początkowa $v_0 = 0$ m/s.

Szukamy prędkości końcowej v .

Droga s w ruchu jednostajnie przyspieszonym, gdy prędkość początkowa jest równa

zero wyraża się wzorem:

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

gdzie a to przyspieszenie. Przekształcamy wzór, aby znaleźć a :

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad | \cdot 2$$

$$2s = at^2 \quad | : t^2$$

$$a = \frac{2s}{t^2}$$

Prędkość końcowa v w ruchu jednostajnie przyspieszonym wyraża się wzorem:

$$v = v_0 + at$$

Ponieważ $v_0 = 0$ otrzymujemy:

$$v = at$$

Podstawiając a do tego wzoru otrzymamy:

$$v = \frac{2s}{t^2}t = \frac{2s}{t}$$

Na koniec podstawiamy znane wartości:

$$v = \frac{2s}{t} = \frac{2 \cdot 100\text{m}}{10\text{s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkość końcowa ciała wynosi 20 m/s.

Zadanie 3.10 Piłka została rzucona poziomo z dachu budynku o wysokości $h = 20$ m z prędkością początkową $v_0 = 12$ m/s. Przyjmując przyspieszenie grawitacyjne $g = 9,81$ m/s², wyznacz czas lotu piłki do momentu uderzenia w ziemię, odległość od podstawy budynku, w której piłka upadnie na ziemię oraz kąt, pod jakim piłka uderzy w ziemię względem poziomu.

Rozwiązanie:

Dane z zadania:

Wysokość budynku $h = 20$ m,

Prędkość początkowa w poziomie $v_0 = 12$ m/s,

Przyspieszenie grawitacyjne $g = 9,81$ m/s².

Czas lotu piłki t wyznaczymy z równania drogi w ruchu jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem g , który powoduje spadek piłki w dół:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \mid \cdot 2$$

$$2h = gt^2 \mid : g$$

$$\frac{2h}{g} = t^2 \mid \sqrt{}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Podstawmy wartości do wzoru:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 20\text{m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{\frac{40\text{m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{4,08\text{m} \frac{\text{s}^2}{\text{m}}} = 2,02 \text{ s}$$

Zasięg w rzucie pionowym wyznaczmy z równania drogi w ruchu jednostajnym z prędkością v_0 , który powoduje ruch piłki poziomo:

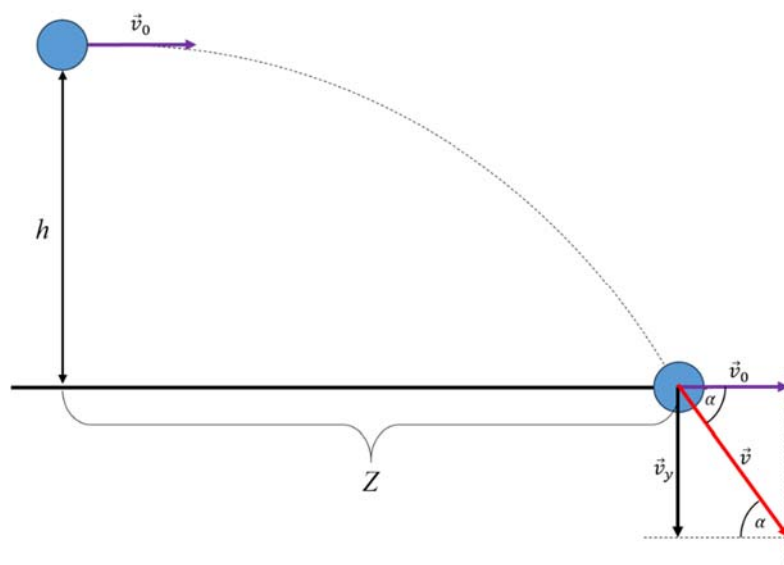
$$Z = v_0 t$$

Do tego równania podstawmy wzór na czas t wyznaczony wcześniej:

$$Z = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$Z = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 20\text{m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{40\text{m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{4,08\text{m} \frac{\text{s}^2}{\text{m}}} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2,02 \text{ s} = 24,24\text{m}$$

W momencie uderzenia w ziemię piłka osiąga prędkość końcową v , która ma dwie składowe: poziomą $v_x = v_0$ oraz pionową $v_y = gt$, co pokazano na rysunku.



W celu wyznaczenia kąta pod jakim piłka uderzy w ziemię względem poziomu skorzystamy z funkcji trygonometrycznej $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{gt}{v_0}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{g \sqrt{\frac{2h}{g}}}{v_0} = \frac{\sqrt{g^2 \frac{2h}{g}}}{v_0} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}$$

Podstawmy dane z zadania:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20\text{m}}}{12 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{\sqrt{392,4 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}}{12 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{19,81 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{12 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,65$$

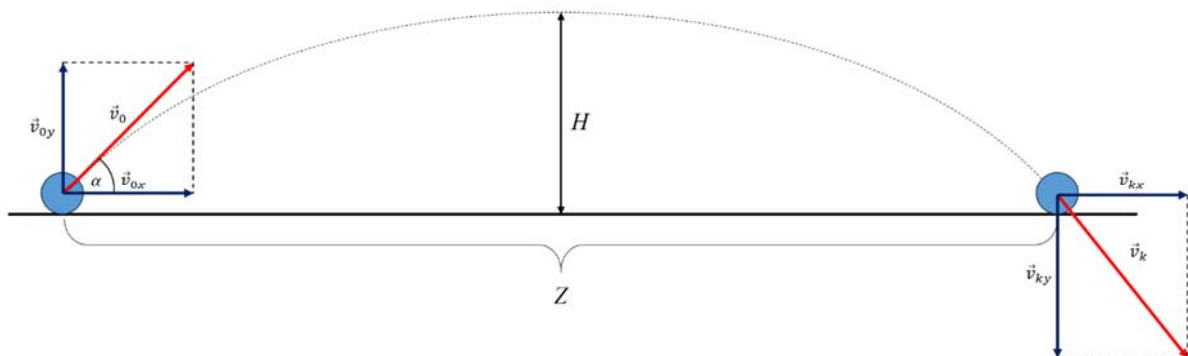
Aby poznać wartość kąta α należy w tablicach trygonometrycznych sprawdzić dla jakiego kąta jego tangens wynosi 1,65.

$$\alpha \approx 58^\circ$$

Odpowiedź: Piłka uderzy w ziemię po czasie $t = 2,02$ s w odległości $Z = 24,24$ m, pod kątem $\alpha \approx 58^\circ$ względem poziomu.

Zadanie 3.11 Piłka została kopnięta pod kątem $\alpha = 45^\circ$ z prędkością początkową $v_0 = 20$ m/s. Przyjmując przyspieszenie grawitacyjne $g = 9,81$ m/s², oblicz czas lotu piłki do momentu uderzenia w podłoże, maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się piłka, zasięg rzutu piłki oraz wartość prędkości z jaką piłka uderzy o podłoże.

Rozwiązanie:



Na rzut ukośny składają się dwa niezależne ruchy, co pokazano na rysunku powyżej:

1. ruch jednostajny w poziomie z prędkością v_{0x} ,
2. ruch jednostajnie zmienny w pionie z prędkością v_y .

Prędkość początkową v_0 rozkładamy na składowe v_{0x} oraz v_{0y} wyznaczamy z funkcji trygonometrycznej kąta α :

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

Czas wznoszenia t_w obliczamy z równania ruchu jednostajnie opóźnionego w pionie, z prędkością początkową v_{0y} :

$$v_y = v_{0y} - gt_w \quad | + gt_w$$

$$v_y + gt_w = v_{0y} \quad | - v_y$$

$$gt_w = v_{0y} - v_y \quad | : g$$

$$t_w = \frac{v_{0y} - v_y}{g}$$

Ponieważ prędkość pionowa osiąga na szczycie toru wartość $v_y = 0$ otrzymujemy:

$$t_w = \frac{v_{0y}}{g}$$

Zaś całkowity czas lotu t jest dwukrotnością czasu wznoszenia t_w , oraz $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$

$$t = 2 \frac{v_{0y}}{g} = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Podstawmy wartości do wyprowadzonego wzoru:

$$t = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = 2 \cdot \frac{20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 45^\circ}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2 \cdot \frac{20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{20\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 2,88 \text{ s}$$

Maksymalną wysokość osiągamy po czasie t_w , gdy prędkość pionowa $v_y = 0$. Wysokość tę obliczamy, korzystając z równania drogi w ruchu jednostajnie opóźnionym w pionie z prędkością początkową v_{0y} :

$$h = v_{0y}t_w - \frac{1}{2}gt_w^2$$

Podstawmy wzór na czas wznoszenia t_w wyprowadzony wcześniej:

$$h = v_{0y} \frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_{0y}}{g} \right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{1}{2}g \frac{v_{0y}^2}{g^2} = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g}$$

Wiedząc, że $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$:

$$h = \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Podstawiamy znane wartości podane w zadaniu:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{\left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot \sin^2 45^\circ}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{400 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{19,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{400 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \frac{2}{4}}{19,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{200 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{19,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 10,19 \text{ m}$$

Zasięg rzutu to odległość pozioma, jaką ciało przebywa podczas całego lotu. Ponieważ ruch w poziomie jest jednostajny, zasięg obliczamy z równania drogi jako iloczyn prędkości poziomej v_{0x} i czasu całkowitego lotu t :

$$Z = v_{0x} t$$

Podstawmy do tego wzoru znaną wcześniej z funkcji trygonometrycznej zależność v_{0y} oraz wzór na całkowity czas lotu:

$$Z = v_0 \cos \alpha \cdot 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = 2 \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$$

Podstawmy znane wartości do wzoru:

$$\begin{aligned} Z &= 2 \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \sin 45^\circ \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{400 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2 \cdot \frac{200 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\ &= 40,77 \text{ m} \end{aligned}$$

Prędkość końcowa v_k z jaką piłka uderza w podłoże po czasie t to wypadkowa dwóch składowych:

1. poziomej v_{kx} , która jest stała $v_{kx} = v_{0x}$
2. pionowej v_{ky} , którą określamy równaniem prędkości ruchu jednostajnie opóźnionego: $v_{ky} = v_{0y} - gt$

Całkowitą prędkość końcową v_k wyznaczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$v_k^2 = v_{0x}^2 + v_{ky}^2$$

Równanie pierwiastkujemy stronami:

$$v_k = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{ky}^2}$$

Podstawiamy znalezione wcześniej wzory na v_{0x} oraz v_{ky} :

$$v_k = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_{0y} - gt)^2}$$

Teraz podstawiamy v_{0y} oraz t :

$$v_k = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + \left(v_0 \sin \alpha - g \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2}$$

Uporządkujemy to równanie:

$$\begin{aligned} v_k &= \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - 2v_0 \sin \alpha)^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (-v_0 \sin \alpha)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{v_0^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = v_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Podstawmy wartości podane w zadaniu:

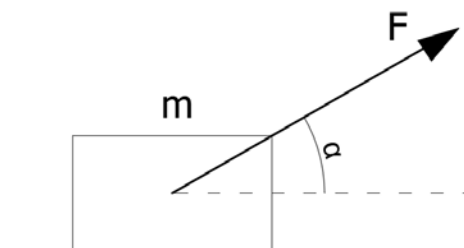
$$\begin{aligned} v_k &= v_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\cos^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{1} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Odpowiedź: Czas lotu piłki do momentu uderzenia w podłoże wynosi $t \approx 2,88$ s, maksymalna wysokość, na jaką wzniesie się piłka wynosi $h = 10,19$ m, zasięg rzutu piłki to $Z = 40,77$ m, a wartość prędkości z jaką piłka uderzy o podłoże wynosi $v_k = 20$ m/s.

4. Dynamika punktu materialnego

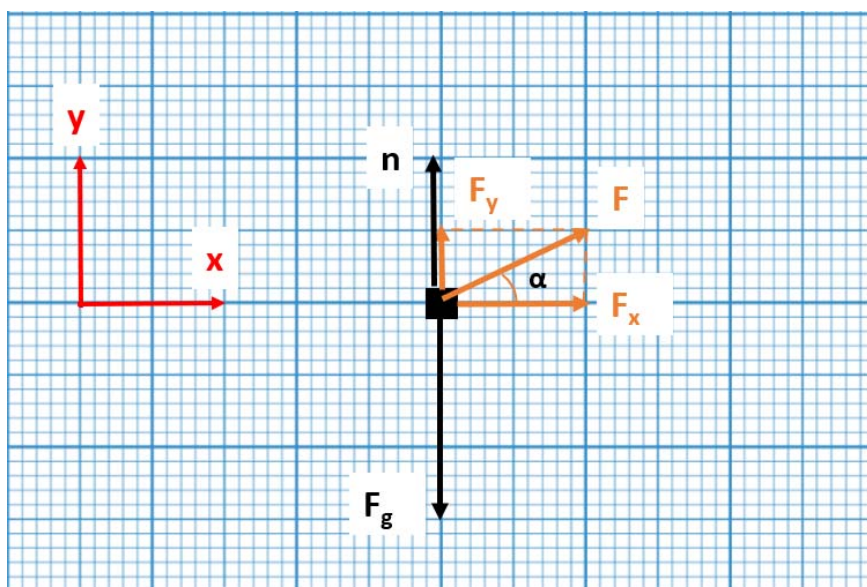
Zadanie 4.1 Na ciało o masie $m = 5$ kg działa stała siła $F = 20$ N pod kątem $\alpha = 30^\circ$ względem poziomu. Sytuację przedstawia poniższy rysunek. Oblicz przyspieszenie ciała:

- bez uwzględnienia siły tarcia
- po uwzględnieniu siły tarcia. Przyjmij współczynnik tarcia kinetycznego (dynamicznego) między ciałem a podłożem $\mu = 0,2$.



Rozwiązanie:

- a) Pierwszym etapem rozwiązywania zadań z dynamiki jest zazwyczaj wykonanie dokładnego (w miarę możliwości) rysunku, który przedstawia wszystkie siły działające na dane ciało. Aby uprościć rysunek, pierwotny kształt ciała przedstawia się jako punkt o masie m . Siła jest wielkością wektorową. W odróżnieniu od wielkości skalarnych, wielkości wektorowe do ich pełnego opisu potrzebują układu odniesienia. Ciało w zadaniu porusza się w poziomie w prawą stronę. Rozsądnie jest zatem przyjąć dodatni zwrot osi x skierowany w prawo, a dodatni zwrot osi y skierowany do góry.



Ponieważ siła F skierowana jest pod pewnym kątem względem poziomu, należy ten wektor rozłożyć na składowe zawierające się w osiach x oraz y przyjętego układu odniesienia. Rysując poszczególne strzałki odpowiadające wektorom poszczególnych sił trzeba pamiętać o uwzględnieniu ich odpowiedniej długości – wartości siły. Gdy ciało znajduje się w spoczynku na poziomej powierzchni, z I zasady dynamiki Newtona wiadomo, że siła grawitacji F_g i siła reakcji podłoża n równoważą się. W przypadku opisanym w zadaniu siła F posiada składową działającą na ciało pionowo do góry. Ponieważ ciało przemieszcza się jedynie w poziomie, siły działające wzdłuż osi y muszą się równoważyć (I zasada dynamiki Newtona). W związku z tym, składowa F_y powoduje zmniejszenie wartości siły reakcji podłoża n , ale sumarycznie obydwie te siły mają wartość równą wartości siły grawitacji F_g . Fakt ten odzwierciedla odpowiednio przyjęta

długość strzałek na rysunku. Wzdłuż osi x działa jedynie składowa pozioma siły F o stałej wartości, co powoduje ruch rozpatrywanego ciała w prawą stronę ze stałym przyspieszeniem (II zasada dynamiki Newtona).

Kolejnym etapem rozwiązania zadania jest zapisanie równań bilansu sił działających wzdłuż poszczególnych osi przyjętego układu odniesienia. Z II zasady dynamiki Newtona możemy zapisać, że wypadkowa siła ΣF działająca na ciało wzdłuż osi x ma wartość:

$$\sum F_x = F_x = m \cdot a$$

Ponieważ wartość składowej F_x nie jest znana, należy ją opisać za pomocą innych znanych wielkości: siły F oraz kąta α . Wektor F tworzy na rysunku ze swoimi składowymi trójkąt prostokątny. Po wykorzystaniu odpowiedniej funkcji trygonometrycznej, składowa F_x to:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

Podstawiając drugie równanie do pierwszego otrzymujemy:

$$F \cdot \cos \alpha = m \cdot a$$

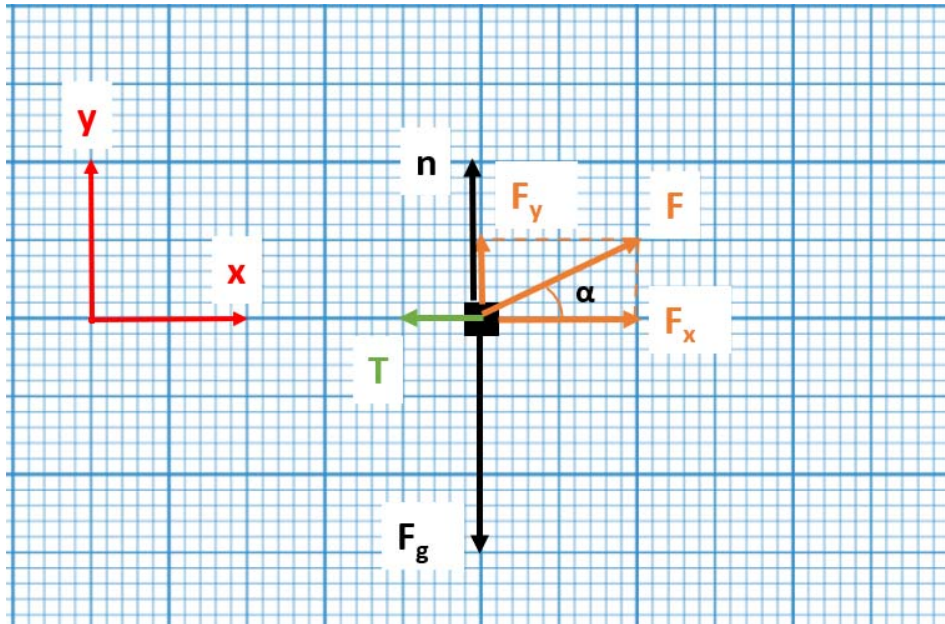
Po wykonaniu przekształcenia równania:

$$a = \frac{F \cdot \cos \alpha}{m}$$

Podstawiając odpowiednie wartości z treści zadania otrzymujemy:

$$a = \frac{20 \text{ N} \cdot \cos 30^\circ}{5 \text{ kg}} = 3,46 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- b) W tym przypadku na ciało działa dodatkowo siła tarcia kinetycznego T . Siła tarcia skierowana jest równolegle do powierzchni, po której porusza się ciało, a zwrot tego wektora jest przeciwny do zwrotu wektora prędkości ciała (jeżeli ciało przemieszcza się w prawą stronę to siła tarcia działa w lewo). Rysując strzałkę odpowiadającą wektorowi T należy pamiętać o uwzględnieniu jej odpowiedniej długości – wartości siły. Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona ciało posiada przyspieszenie, gdy działa na nie wypadkowa siła. W zadaniu ciało przyspiesza wzdłuż osi x , zatem siła F_x musi być większa od siły tarcia T . Fakt ten odzwierciedla odpowiednio przyjęta długość strzałek na rysunku.



Kolejnym etapem rozwiązania zadania jest zapisanie równań bilansu sił działających wzdłuż poszczególnych osi przyjętego układu odniesienia. Siły, jako wielkości wektorowe, zapisujemy w równaniach z odpowiednim znakiem. Jeżeli zwrot danego wektora jest zgodny z dodatnim zwrotem przyjętego układu odniesienia zapisujemy tę wielkość ze znakiem „+”. Jeżeli zwrot jest przeciwny, wielkość zapisujemy ze znakiem „-”. Z II zasady dynamiki Newtona możemy zapisać, że wypadkowa siła ΣF działająca na ciało wzdłuż osi x ma wartość:

$$\sum F_x = F_x - T = m \cdot a$$

Ponieważ wartość składowej F_x nie jest znana, należy ją opisać za pomocą innych znanych wielkości: siły F oraz kąta α . Wektor F tworzy na rysunku ze swoimi składowymi trójkąt prostokątny. Po wykorzystaniu odpowiedniej funkcji trygonometrycznej, składowa F_x to:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

Wartość siły tarcia kinetycznego wyraża się wzorem:

$$T = \mu \cdot n$$

Wypadkowa siła ΣF działająca na ciało wzdłuż osi y ma wartość:

$$\sum F_y = n + F_y - F_g = 0$$

Ponieważ wartość składowej F_y nie jest znana, należy ją opisać za pomocą innych znanych wielkości: siły F oraz kąta α . Wektor F tworzy na rysunku ze

swoimi składowymi trójkąt prostokątny. Po wykorzystaniu odpowiedniej funkcji trygonometrycznej, składowa F_y to:

$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

Wartość siły grawitacji wyraża się wzorem:

$$F_g = m \cdot g$$

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} F \cdot \cos \alpha - T = m \cdot a \\ n + F \cdot \sin \alpha - m \cdot g = 0 \\ T = \mu \cdot n \end{cases}$$

Wyznaczając n z drugiego równania i wstawiając je do trzeciego otrzymujemy:

$$\begin{cases} F \cdot \cos \alpha - T = m \cdot a \\ T = \mu \cdot (m \cdot g - F \cdot \sin \alpha) \end{cases}$$

Następnie wstawiamy drugie równanie do pierwszego:

$$F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot (m \cdot g - F \cdot \sin \alpha) = m \cdot a$$

Aby wyznaczyć przyspieszenie, obie strony równania należy podzielić przez masę m :

$$a = \frac{F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot (m \cdot g - F \cdot \sin \alpha)}{m}$$

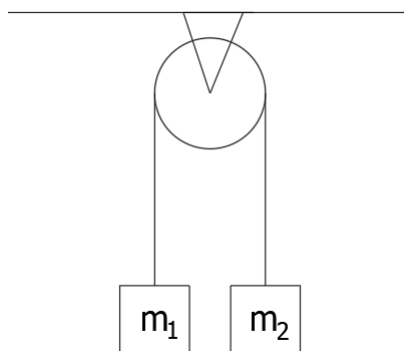
Podstawiając odpowiednie wartości z treści zadania otrzymujemy:

$$a = \frac{20 \text{ N} \cdot \cos 30^\circ - 0,2 \cdot \left(5 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 20 \text{ N} \cdot \sin 30^\circ \right)}{5 \text{ kg}} = 1,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Zgodnie z oczekiwaniami ciało posiada mniejsze przyspieszenie w przypadku występowania siły tarcia.

Zadanie 4.2 Dwa ciała zawieszone są na kołowrotku na nieważkiej i nierozciągliwej linie. Ciała posiadają masę $m_1 = 5 \text{ kg}$ oraz $m_2 = 2 \text{ kg}$. W chwili początkowej ciała znajdują się na tej samej wysokości jak pokazano na rysunku poniżej. Oblicz:

- przyspieszenie ciał a
- siłę naciągu liny N



Rozwiązanie:

- a) Pierwszym etapem rozwiązywania zadań z dynamiki jest zazwyczaj wykonanie dokładnego (w miarę możliwości) rysunku, który przedstawia wszystkie siły działające na dane ciało. Aby uprościć rysunek, pierwotny kształt ciała przedstawia się jako punkt o masie m . Siła jest wielkością wektorową. W odróżnieniu od wielkości skalarnych, wielkości wektorowe do ich pełnego opisu potrzebują układu odniesienia. Ciała w zadaniu poruszają się wyłącznie w pionie: jedno ciało w dół, drugie w górę. W takiej sytuacji należy przyjąć dwa osobne układy odniesienia, w których dodatni zwrot osi y skierowany jest zgodnie z ruchem danego ciała.

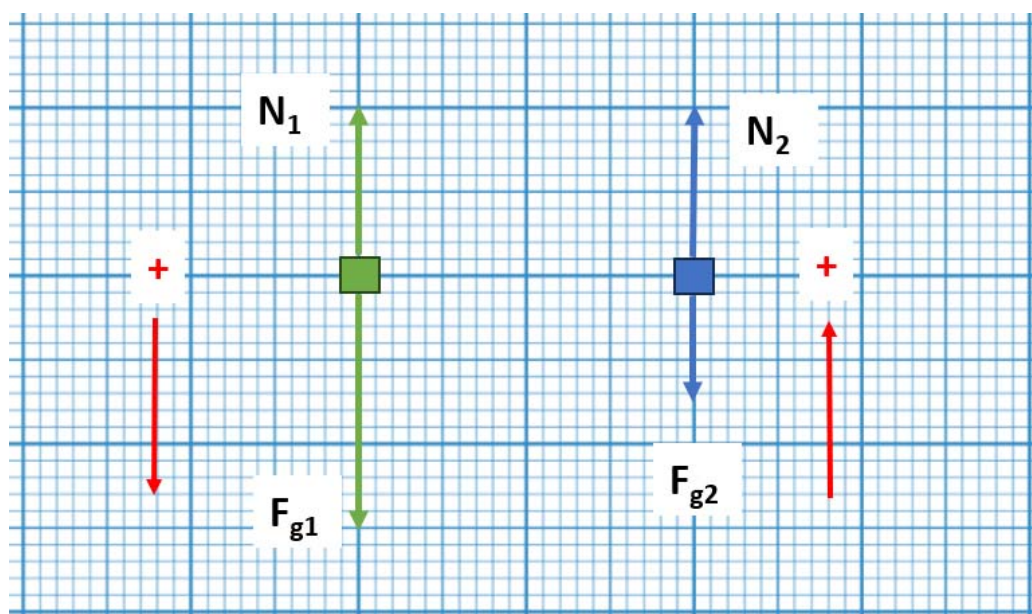
Rysując poszczególne strzałki odpowiadające wektorom poszczególnych sił trzeba pamiętać o uwzględnieniu ich odpowiedniej długości – wartości siły. Na każde ciało działa siła grawitacji F_g skierowana pionowo w dół. Wartość siły grawitacji zależy od masy ciała, na które ta siła oddziałuje. Zatem wartość siły grawitacji działającej na pierwsze ciało będzie większa. Fakt ten odzwierciedla odpowiednio przyjęta długość strzałek na rysunku. Aby lżejsze ciało mogło się przemieszczać do góry musi występować jednak jeszcze inna siła, której wartość będzie większa od wartości F_{g2} . Ta siła to siła naciągu liny N – siła z jaką ciało pierwsze ciągnie za sobą działa drugie i na odwrót. Siła naciągu liny ma taką samą wartość dla obydwu ciał. Kluczowa jest tu informacja o nieważkości ($m_{liny} = 0$) i nierozciągliwości (sztywności) liny. Należy wyobrazić sobie linę składającą się z wielu równych części. W trakcie ruchu ciał połączonych liną żaden z elementów liny nie zmienia swojego położenia (odległości) względem jednego lub drugiego ciała – lina jest sztywna. Zapisując

bilans sił dla jednego z elementów i stosując I zasadę dynamiki Newtona przekonamy się, że:

$$\sum F = N_1 - N_2 = 0 \rightarrow N_1 = N_2$$

Zatem nieważka i nierozciągliwa lina jest jedynie nośnikiem siły. Połączone ciała oddziałują ze sobą zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona siłą o takiej samej wartości, lecz o przeciwnym zwrocie.

Ostatnim czynnikiem wpływającym na długość rysowanych strzałek dla siły naciągu N jest pionowy ruch pierwszego ciała w dół związany z występowaniem wypadkowej siły (II zasada dynamiki Newtona). Aby taka siła występowała, wartość siły naciągu N musi być mniejsza od wartości siły grawitacji F_{g1} . Fakt ten również uwzględniono na sporządzonym rysunku.



Kolejnym etapem rozwiązania zadania jest zapisanie równań bilansu sił działających wzdłuż poszczególnych osi przyjętego układu odniesienia. Siły, jako wielkości wektorowe, zapisujemy w równaniach z odpowiednim znakiem. Jeżeli zwrot danego wektora jest zgodny z dodatnim zwrotem przyjętego układu odniesienia zapisujemy tę wielkość ze znakiem „+”. Jeżeli zwrot jest przeciwny, wielkość zapisujemy ze znakiem „-”. Z II zasady dynamiki Newtona możemy zapisać, że wypadkowa siła ΣF działająca na pierwsze ciało wzdłuż osi y ma wartość:

$$\sum F_y = F_{g1} - N_1 = m_1 \cdot a_1$$

Dla drugiego ciała równanie to ma postać:

$$\sum F_y = N_2 - F_{g2} = m_2 \cdot a_2$$

Ponieważ ciała połączone są sztywną linią, poruszają się z jednakowym przyspieszeniem. Stąd $a_1 = a_2 = a$. Dodatkowo $N_1 = N_2 = N$. Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} F_{g1} - N = m_1 \cdot a \\ N - F_{g2} = m_2 \cdot a \end{cases}$$

Wartość siły grawitacji wyraża się wzorem:

$$F_g = m \cdot g$$

Nowy układ równań przyjmuje postać:

$$\begin{cases} m_1 \cdot g - N = m_1 \cdot a \\ N - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a \end{cases}$$

Dodając równania stronami otrzymujemy:

$$m_1 \cdot g - m_2 \cdot g = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a$$

Po uporządkowaniu równania:

$$g(m_1 - m_2) = a(m_1 + m_2)$$

Aby wyznaczyć przyspieszenie, obie strony równania należy podzielić przez sumę mas:

$$a = g \cdot \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)$$

Podstawiając odpowiednie wartości z treści zadania otrzymujemy:

$$a = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{5 - 2}{5 + 2} \right) = 4,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) Siłę naciągu liny N wyznaczamy z jednego z równań z podpunktu (a):

$$N - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$$

Po przekształceniu równania:

$$N = m_2 \cdot (a + g) = 2 \text{ kg} \cdot (4,2 + 9,81) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 28 \text{ N}$$

Zadanie 4.3 Łucznik o masie $M = 100 \text{ kg}$ znajdujący się na idealnie gładkiej tafli lodu wystrzelił poziomo strzałę o masie $m = 0,4 \text{ kg}$ z prędkością $v_s = 50 \text{ m/s}$. Z jaką prędkością będzie poruszał się łucznik po oddaniu strzału? Wielkości wektorowe oznaczono pogrubioną czcionką.

Rozwiązanie:

Łucznik oraz strzała tworzą układ izolowany (brak sił zewnętrznych oddziałujących na układ). W takim układzie zasada zachowania pędu jest spełniona. Zasadę tę można wyrazić w następujący sposób:

$$\Delta p = 0$$

Całkowity pęd w układzie izolowanym jest stały (zmiana pędu układu jest zerowa).

Aby rozwiązać zadanie należy zdefiniować pęd początkowy oraz końcowy ciał w układzie. Zgodnie z zasadą zachowania pędu, wartość pędu początkowego (p) układu równa się wartości pędu końcowego (k):

$$p_p = p_k$$

Jednocześnie należy pamiętać o tym, że pęd jest wielkością wektorową wyrażaną jako iloczyn masy oraz prędkości:

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$$

W odróżnieniu od wielkości skalarnych, wielkości wektorowe do ich pełnego opisu potrzebują układu odniesienia. Zwrot wektora pędu ma znaczenie i wielkość tę zapisujemy w równaniach z odpowiednim znakiem. Jeżeli zwrot danego wektora jest zgodny z dodatnim zwrotem przyjętego układu odniesienia zapisujemy jego wartość (długość) ze znakiem „+”. Jeżeli zwrot jest przeciwny, wartość zapisujemy ze znakiem „-”.

W zadaniu obydwa ciała posiadają pęd początkowy równy 0. W chwili oddania strzału przez łucznika pęd końcowy układu możemy zatem zapisać jako sumę wektorów pędu dwóch ciał:

$$\mathbf{p}_L + \mathbf{p}_S = 0$$

Po przekształceniu równania:

$$M \cdot \mathbf{v}_L + m \cdot \mathbf{v}_S = 0$$

Prędkość łucznika po oddaniu strzały wyznaczymy z równania:

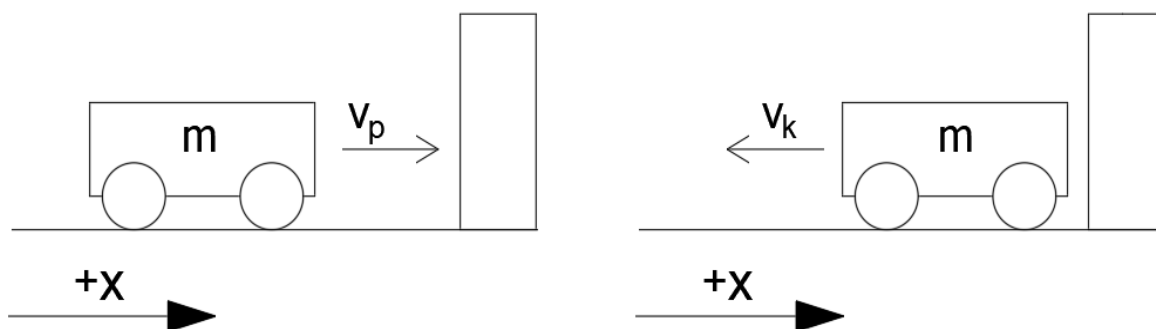
$$\mathbf{v}_L = -\frac{m}{M} \cdot \mathbf{v}_S$$

Po podstawianiu odpowiednich wartości z zadania:

$$\mathbf{v}_L = -\frac{0,4}{100} \cdot 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Po oddaniu strzału łucznik będzie się przemieszczał po gładkim lodzie z prędkością $-0,2 \text{ m/s}$, tj. w przeciwną stronę do wektora prędkości lecącej strzały.

Zadanie 4.4 Podczas testu zderzeniowego samochód o masie $m = 1,4 \text{ t}$ uderza w przeszkodę jak pokazano na rysunku. Prędkość początkowa i końcowa samochodu wynosi odpowiednio $\mathbf{v_p} = 15\mathbf{i} \text{ m/s}$ oraz $\mathbf{v_k} = -2,6\mathbf{i} \text{ m/s}$. Jeżeli czas kontaktu samochodu z przeszkodą wynosi $t = 0,2 \text{ s}$, znajdź wartość popędu siły $\mathbf{I}$ oraz średnią siłę $\mathbf{F}$ oddziałującą na samochód. Wielkości wektorowe oznaczono pogrubioną czcionką.



Rozwiązanie:

Samochód w zadaniu znajduje się w układzie nieizolowanym (oddziałuje na niego zewnętrzna siła). W takim przypadku można wyznaczyć impuls $\mathbf{I}$ (popęd siły $\mathbf{F}$). Popęd wyraża wpływ zewnętrznej siły działającej przez określony czas na ciało, która powoduje zmianę jego pędu:

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{I}$$

Jednocześnie należy pamiętać o tym, że pęd i popęd są wielkościami wektorowymi. Pęd wyraża się jako iloczyn masy oraz prędkości:

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$$

W odróżnieniu od wielkości skalarnych, wielkości wektorowe do ich pełnego opisu potrzebują układu odniesienia. Zwrot wektora pędu ma znaczenie i wielkość tę zapisujemy w równaniach z odpowiednim znakiem. Jeżeli zwrot danego wektora jest zgodny z dodatnim zwrotem przyjętego układu odniesienia zapisujemy jego wartość (długość) ze znakiem „+”. Jeżeli zwrot jest przeciwny, wartość zapisujemy ze znakiem „-”.

Rozwiązanie zadania należy rozpocząć od sprowadzenia wszystkich jednostek do jednostek podstawowych układu SI.

$$1,4 \text{ t} = 1,4 \text{ t} \cdot \left(\frac{1000 \text{ kg}}{1 \text{ t}} \right) = 1400 \text{ kg}$$

Kolejnym etapem jest zapisanie równania na zmianę pędu układu:

$$I = \Delta p = p_k - p_p = m \cdot (v_k - v_p)$$

Podstawiając odpowiednie wartości z zadania otrzymujemy:

$$I = 1400 \text{ kg} \cdot (-2,6 - 15) \frac{\text{m}}{\text{s}} = -24640 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Na podstawie wcześniejszej definicji, popęd siły można również zdefiniować jako iloczyn średniej wypadkowej siły działającej na ciało oraz czasu działania tej siły:

$$I = F \cdot t$$

Powyższe równanie należy przekształcić, aby wyznaczyć wartość siły F :

$$F = \frac{I}{t}$$

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy:

$$F = \frac{-24640 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,2 \text{ s}} = -123200 \text{ N} = -123,2 \text{ kN}$$

Zadanie 4.5 Oblicz pracę wykonaną przez siłę $F = 5 \text{ N}$, działającą równolegle do poziomego toru, po którym ciało o masie $m = 10 \text{ kg}$ przesuwa się bez tarcia w czasie $t = 5 \text{ s}$.

Rozwiązanie:

Aby obliczyć pracę wykonaną przez siłę $F = 5 \text{ N}$ działającą równolegle do poziomego toru, po którym ciało porusza się bez tarcia, potrzebujemy drogi s , którą przebywa ciało w czasie $t = 5 \text{ s}$.

Pracę W obliczamy ze wzoru:

$$W = F \cdot s$$

Na ciało działa siła F , więc zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona:

$$a = \frac{F}{m}$$

Drogę jako pokonało to ciało w czasie t znajdziemy z równania drogi w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$$

Teraz znaleziony wzór na drogę s wstawiamy do pierwszej zależności:

$$W = F \cdot \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 = \frac{1}{2} \frac{F^2 t^2}{m}$$

Podstawmy wartości podane w zadaniu:

$$W = \frac{1}{2} \frac{F^2 t^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{(5\text{N})^2 (5\text{s})^2}{10\text{kg}} = \frac{25\text{N}^2 \cdot 25\text{s}^2}{20\text{kg}} = \frac{625 \text{N}^2 \text{s}^2}{20 \text{kg}} = 31,25 \frac{\text{N}^2 \text{s}^2}{\text{kg}}$$

Uzgodnijmy jednostki:

$$[W] = \frac{\text{N}^2 \text{s}^2}{\text{kg}} = \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s}^2}{\text{kg}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$$

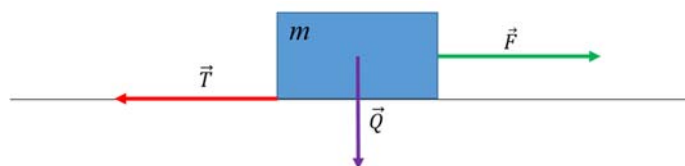
Zapiszmy wynik końcowy z uzgodnioną jednostką:

$$W = 31,25 \text{ J}$$

Odpowiedź: Siła $F = 5 \text{ N}$ wykona pracę $W = 31,25 \text{ J}$, przesuwając ciało w czasie $t = 5 \text{ s}$ na odcinku $s = 6,25 \text{ m}$.

Zadanie 4.6 Oblicz pracę potrzebną do przesunięcia ciała o masie $m = 10 \text{ kg}$ ze stałą prędkością na odległość $s = 20 \text{ m}$, jeśli współczynnik tarcia między ciałem a podłożem wynosi $f = 0,2$.

Rozwiązanie:



Aby przesuwać ciało ze stałą prędkością, to zgodnie z I zasadą dynamiki Newtona musimy działać siłą równą sile tarcia.

$$F = T$$

Gdzie siła tarcia T wynosi:

$$T = fQ$$

Zaś Q jest to siła nacisku na podłoże, która dla poziomego toru jest równa sile ciężkości:

$$Q = mg$$

Praca jaką musimy wykonać jest równa:

$$W = Fs$$

Podstawmy odpowiednie zależności do tego wzoru:

$$W = Ts = fQs = fmg s$$

Na koniec wystarczy podstawić znane wartości z zadania i uzgodnić jednostki:

$$W = fmg s = 0,2 \cdot 10 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20 \text{ m} = 392,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m} = 392,4 \text{ N} \cdot \text{m} = 392,4 \text{ J}$$

Odpowiedź: Aby przesunąć ciało na odległość 20 m ze stałą prędkością, należy wykonać pracę równą 392,4 J

Zadanie 4.7 Oblicz siłę ciągu silnika samochodu o mocy $P = 30 \text{ kW}$, poruszającego się ze stałą prędkością $v = 72 \text{ km/h}$.

Rozwiązanie:

Moc jest wielkością fizyczną, która mówi nam jak szybko jest (lub może być) wykonana pewna praca zgodnie ze wzorem

$$P = \frac{W}{t}$$

A ponieważ praca to :

$$W = Fs$$

W związku z tym otrzymujemy:

$$P = \frac{Fs}{t} = F \frac{s}{t} = Fv$$

Przekształćmy ten wzór aby otrzymać siłę ciągu silnika F :

$$P = Fv \quad |:v$$

$$F = \frac{P}{v}$$

Przed podstawieniem wartości z zadania przeliczmy jednostkę prędkości na m/s:

$$[v] = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Teraz podstawmy dane z zadania do wzoru na siłę ciągu silnika:

$$F = \frac{P}{v} = \frac{30 \text{ kW}}{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{30000 \text{ W}}{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1500 \frac{\text{Nm s}}{\text{s m}} = 1500 \text{ N}$$

Odpowiedź: Siła ciągu silnika wynosi $F = 1500 \text{ N}$.

Zadanie 4.8 Wykorzystując zasadę zachowania energii, oblicz maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się ciało rzucone pionowo w górę z prędkością $v = 10 \text{ m/s}$.

Rozwiązanie:

W momencie rzutu ciało posiada tylko energię kinetyczną:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Gdy ciało znajduje się na maksymalnej wysokości posiada tylko energię potencjalną:

$$E_p = mgh$$

Całkowita energia mechaniczna na początku ruchu (energia kinetyczna) zamienia się w całości na energię potencjalną na maksymalnej wysokości. Zgodnie z zasadą zachowania energii:

$$E_k = E_p$$

Przyrównajmy oba wzory stronami:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

Przekształćmy to równanie aby otrzymać wzór na maksymalną wysokość na jaką wzniesie się ciało:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad | \cdot 2$$

$$mv^2 = 2mgh \quad | : 2mg$$

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

Teraz wystarczy podstawić wartości podane w zadaniu:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{100 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{19,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5,1 \text{ m}$$

Odpowiedź: Ciało wzniesie się na wysokość 5,1 m.

5. Drgania

Zadanie 5.1 Sprężyna po obciążeniu masą 250 kg wydłużyła się o 10 cm? Ile wynosi współczynnik sprężystości sprężyny, oraz okres drgań układu? Przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Rozwiązanie:

Siła sprężystości wyraża się wzorem:

$$F = k \cdot x,$$

gdzie:

k – współczynnik sprężystości,

x – wychylenie z położenia równowagi.

W naszym przypadku siła jest równa ciężarowi ciała:

$$F = m \cdot g$$

Zatem

$$m \cdot g = k \cdot x$$

$$k = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{250 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{10 \text{ cm}} = \frac{2500 \text{ N}}{0,1 \text{ m}} = 25000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Okres drgań harmoniczných wyraża się wzorem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{250 \text{ kg}}{25000 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{100} \frac{\text{kg}}{\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \frac{2\pi}{10} \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}} = 0,63 \text{ s}$$

Zadanie 5.2 Ciało drga ruchem harmonicznym prostym. Wyznaczyć a) prędkość, b) przyspieszenie, c) energię kinetyczną i d) energię potencjalną ciała w chwili gdy wychylenie jest równe połowie amplitudy. Dane są: amplituda A , częstość ω , współczynnik sprężystości k .

Rozwiązanie:

- a) W drganiach harmoniczných wychylenie z położenia równowagi x opisane jest równaniem:

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Z treści zadania wynika:

$$x = A/2$$

Prawe strony obu równań są sobie równe, więc:

$$A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2}$$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}$$

Zatem w chwili gdy wychylenie z położenia równowagi równe jest połowie amplitudy, faza drgań wynosi:

$$(\omega t + \varphi) = 30^\circ = \frac{\pi}{6} [\text{rad}]$$

Wartość tę wykorzystamy przy wyznaczaniu pozostałych parametrów ruchu.

Prędkość w drganiach harmonicznym opisana jest równaniem:

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = v_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$$

Podstawiając wartość fazy drgań otrzymujemy:

$$v = A\omega \cos \frac{\pi}{6} = A\omega \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot v_{\max}$$

b) Przyspieszenie w drganiach harmonicznym opisane jest równaniem:

$$a = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = a_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$$

Ponieważ $\sin(\omega t + \varphi)$, więc otrzymujemy:

$$a = A\omega^2 \cdot 1/2 = a_{\max} / 2$$

c) Energię kinetyczną obliczamy z klasycznego wzoru podstawiając obliczone wyrażenie na prędkość

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m \cdot \left(A\omega \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \cdot mA^2\omega^2$$

Nie znamy wartości masy, więc wyznaczymy ją ze wzoru na częstość drgań harmonicznym:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad / \quad ()^2$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$m = \frac{k}{\omega^2}$$

Wstawiamy to wyrażenie do wzoru na energię kinetyczną:

$$E_k = \frac{3}{8} \cdot mA^2\omega^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{k}{\omega^2} A^2\omega^2 = \frac{3}{8} \cdot kA^2$$

d) Energia potencjalna sprężystości wyraża się wzorem:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{k\left(\frac{A}{2}\right)^2}{2} = \frac{kA^2}{4} = \frac{1}{8} kA^2$$

Energia całkowita E_c drgań równa jest sumie energii kinetycznej i energii potencjalnej:

$$E_c = E_k + E_p = \frac{3}{8} \cdot kA^2 + \frac{1}{8} \cdot kA^2 = \frac{4}{8} \cdot kA^2 = \frac{1}{2} \cdot kA^2$$

Zadanie 5.3 Równanie ruchu punktu materialnego o masie 10 g ma postać $x(t) = 2 \cdot \sin[(\pi/3) \cdot t + \pi/4]$ cm. Znajdź: a) okres drgań, b) maksymalną prędkość, c) maksymalne przyspieszenie, d) maksymalną siłę działającą na punkt, e) całkowitą energię drgającego punktu.

Rozwiązanie:

Porównujemy równanie drgań z zadania z ogólnym równaniem drgań harmoniczych i na tej podstawie odczytujemy parametry ruchu:

$$x(t) = 2 \cdot \sin[(\pi/3) \cdot t + \pi/4] \text{ cm}$$

$$x(t) = A \cdot \sin[\omega \cdot t + \varphi]$$

$$A = 2 \text{ cm}; \quad \omega = \pi/3 [1/s]; \quad \varphi = \pi/4.$$

a) Okres drgań:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{\pi}{3} \frac{1}{s}} = \frac{2\pi \cdot 3}{\pi} s = 6s$$

b) Prędkość maksymalna:

$$v_{\max} = A \cdot \omega = 2 \text{ cm} \cdot \frac{\pi}{3} \frac{1}{s} = 2,09 \frac{\text{cm}}{s} = 2,09 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s}$$

c) Przyspieszenie maksymalne:

$$a_{\max} = A \cdot \omega^2 = 2 \text{ cm} \cdot \left(\frac{\pi}{3} \frac{1}{s} \right)^2 = \frac{2\pi^2}{9} \frac{\text{cm}}{s^2} = 1,1 \frac{\text{cm}}{s^2} = 1,1 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s^2}$$

d) Siła, zgodnie w drugą zasadą dynamiki wyraża się wzorem:

$$F = m \cdot a$$

Zatem siła maksymalna (uwzględniając, że $m = 10 \text{ g} = 0,01 \text{ kg} = 10^{-2} \text{ kg}$):

$$F_{\max} = m \cdot a_{\max} = 10^{-2} \text{ kg} \cdot 1,1 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s^2} = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

e) Energia całkowita jest równa sumie energii kinetycznej i energii potencjalnej sprężystości. Jeśli energia potencjalna jest równa zero, to energia całkowita równa się maksymalnej energii kinetycznej:

$$E_{c,} = E_{k \max} = \frac{m \cdot (v_{\max})^2}{2} = \frac{10^{-2} \text{ kg} \cdot \left(2,09 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} = \frac{10^{-2} \cdot 4,36 \cdot 10^{-4} \left(\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot m}{2}$$

$$E_c = \frac{4,36 \cdot 10^{-6}}{2} \text{ N} \cdot m = 2,18 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Zadanie 5.4 Napisać równanie ruchu drgającego harmonicznego o amplitudzie 8 cm, jeśli w ciągu 1 minuty zachodzi 150 drgań, a faza początkowa drgań wynosi 30° .

Rozwiązanie:

Do ogólnego równania drgań harmonicznnych o postaci:

$$x(t) = A \cdot \sin[\omega \cdot t + \varphi]$$

należy wstawić odpowiednie wartości parametrów.

Z treści zadania wynika, że $A = 8 \text{ cm}$, oraz $\varphi = 30^\circ = \pi/6$.

Aby obliczyć wartość częstości najpierw wyznaczamy częstotliwość:

$$f = \frac{n}{t} = \frac{150}{1 \text{ min}} = \frac{150}{60 \text{ s}} = 2,5 \frac{1}{\text{s}}$$

Częstość jest 2π razy większa od częstotliwości:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 2,5 \frac{1}{\text{s}} = 5\pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Ostatecznie równanie drgań ma postać:

$$x(t) = 8 \cdot \sin[5\pi t + \pi/6] \text{ cm}$$

6. Elektrostatyka

Zadanie 6.1 Jaką prędkość uzyska elektron przyspieszony różnicą potencjałów $U = 5 \text{ V}$ na drodze $d = 5 \text{ cm}$? Jakie przyspieszenie uzyskuje podczas ruchu? Masa elektronu $m = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, ładunek $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Rozwiązanie:

Jeśli spoczywająca na początku cząstka naładowana o ładunku q przebywa różnicę potencjałów U , to praca pola przyspieszającego cząstkę wyraża się wzorem:

$$W = q \cdot U$$

Praca ta zamienia się w energię kinetyczną cząstki, zatem:

$$W = E_k$$

$$q \cdot U = m \cdot v^2 / 2$$

$$2qU = mv^2$$

Obliczamy prędkość elektronu:

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5 \text{ V}}{9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = \sqrt{\frac{3,2 \cdot 5 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{31} \text{ J}}{9 \text{ kg}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{16}{9} \cdot 10^{12} \frac{\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\text{kg}}} = \frac{4}{3} \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,33 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Przyspieszenie cząstki materialnej, zgodnie z drugą zasadą dynamiki, wyraża się wzorem:

$$a = \frac{F}{m}$$

Natężenie pola elektrycznego zdefiniowane jest jako stosunek siły działającej na ładunek do wielkości tego ładunku:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q},$$

zatem siła działająca na cząstkę jest równa:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

Związek natężenia pola z różnicą potencjałów (napięciem) występującym między punktami odległymi o d wyraża się wzorem:

$$E = \frac{U}{d}$$

Ostatecznie wzór na przyspieszenie ładunku przyjmuje postać:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{q \cdot E}{m} = \frac{q \cdot \frac{U}{d}}{m} = \frac{q \cdot U}{m \cdot d} = \frac{e \cdot U}{m \cdot d}$$

Obliczamy wartość przyspieszenia (uwzględniając, że $d = 5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$):

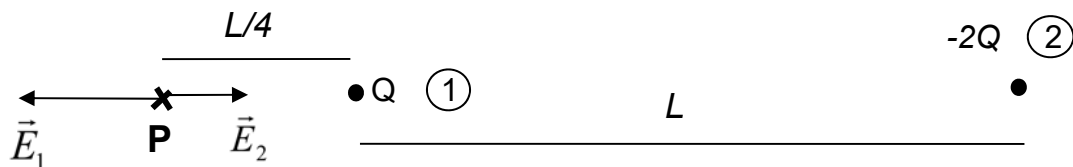
$$a = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5 \text{ V}}{9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{31} \cdot 10^2 \text{ J}}{9 \text{ kg} \cdot \text{m}} = \frac{1,6}{9} \cdot 10^{14} \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\text{kg} \cdot \text{m}} = 1,78 \cdot 10^{13} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Przyspieszenie to jest ponad 10^{12} razy większe od przyspieszenia ziemskiego.

Zadanie 6.2 W odległości L od siebie umieszczono dwa ładunki o przeciwnych znakach Q i $-2Q$. Wyznaczyć natężenie pola elektrycznego oraz jego potencjał w punkcie P leżącym na prostej poprowadzonej przez ładunki przed ładunkiem Q w odległości $L/4$ od niego (jak na rysunku)

Rozwiązanie:

Kierunek i zwrot wektora natężenia pola w punkcie P jest zgodny z kierunkiem i zwrotem siły działającej na próbny ładunek dodatni umieszczony w tym punkcie. Zatem, jak zaznaczono na rysunku, wektor E_1 od dodatniego ładunku Q ma zwrot w lewo, a wektor E_2 od ujemnego ładunku $-2Q$ ma zwrot w prawo. Ładunki zostały ponumerowane, aby jednoznacznie opisywać parametry pola.



Odległości punktu P od ładunków wynoszą odpowiednio:

$$r_1 = L/4; \quad r_2 = 5L/4$$

Pole jest wytwarzane przez ładunki punktowe, więc wartość jego natężenie wyznaczmy zgodnie z prawem Coulomba (Q – wartość bezwzględna ładunku):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Dla poszczególnych ładunków przyjmuje ono postać:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\left(\frac{L}{4}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\frac{L^2}{4 \cdot 4}} = \frac{4Q}{\pi\epsilon\epsilon_0 L^2},$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{2Q}{\left(\frac{5L}{4}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{2Q}{\frac{25L^2}{4 \cdot 4}} = \frac{8}{25} \cdot \frac{Q}{\pi\epsilon\epsilon_0 L^2}$$

Pole wypadkowe od układu ładunków można wyznaczyć z zależności:

$$\vec{E}_w = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Ponieważ zwroty wektorów są przeciwne, przy obliczaniu wartości E_w przyjmujemy zwrot wektora E_1 za dodatni, a zwrot wektora E_2 za ujemny

$$E_w = E_1 - E_2 = 4 \frac{Q}{\pi \epsilon \epsilon_o L^2} - \frac{8}{25} \frac{Q}{\pi \epsilon \epsilon_o L^2} = 3 \frac{17}{25} \frac{Q}{\pi \epsilon \epsilon_o L^2} \quad (\text{zwrot w lewo})$$

Potencjał pola jest skalarem i od ładunku punkowego wyraża się wzorem (uwzględniamy znak ładunku):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_o} \cdot \frac{Q}{r}$$

Zatem potencjały od poszczególnych ładunków mają postać:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_o} \cdot \frac{Q}{\frac{L}{4}} = \frac{1}{\pi\epsilon\epsilon_o} \cdot \frac{Q}{L}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_o} \cdot \frac{-2Q}{\frac{5L}{4}} = \frac{-2}{5} \frac{1}{\pi\epsilon\epsilon_o} \cdot \frac{Q}{L}$$

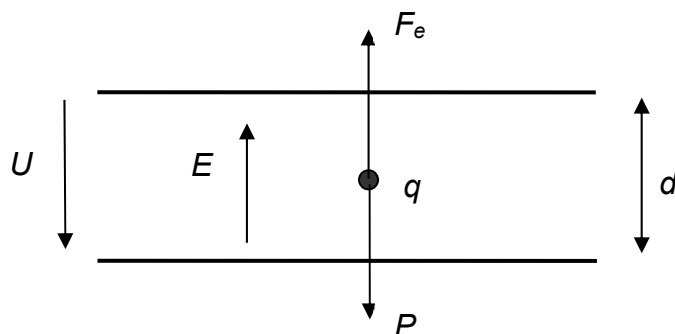
Potencjał pola wypadkowego w punkcie P obliczamy dodając potencjały pól składowych:

$$V_w = V_1 + V_2$$

$$V_w = \frac{1}{\pi\epsilon\epsilon_o} \cdot \frac{Q}{L} - \frac{2}{5} \frac{1}{\pi\epsilon\epsilon_o} \cdot \frac{Q}{L} = \frac{3}{5} \frac{1}{\pi\epsilon\epsilon_o} \cdot \frac{Q}{L}$$

Zadanie 6.3 Poziome okładki płaskiego kondensatora są oddalone o $d = 1$ cm. Między nimi znajduje się pyłek o ciężarze $P = 10^{-7} N$ i ładunku $q = 15$ pC. Jaką różnicę potencjałów (napięcie) należy przyłożyć między okładki kondensatora, aby pyłek pozostawał w spoczynku?

Rozwiązanie:



Pyłec pozostanie w spoczynku, jeśli jego ciężar P będzie zrównoważony równą co do wartości lecz skierowaną do góry siłą elektryczną:

$$F_e = P$$

Siła działająca na ładunek w polu elektrycznym co do wartości równa jest iloczynowi ładunku q i natężenia pola E :

$$F_e = q \cdot E$$

Pole elektryczne wytwarzane w kondensatorze jest jednorodne, więc związek napięcia U między okładkami i natężenia pola E wyraża wzór:

$$E = \frac{U}{d}$$

Po połączeniu powyższych zależności uzyskujemy równanie:

$$q \frac{U}{d} = P$$

Szukane napięcie określa wzór :

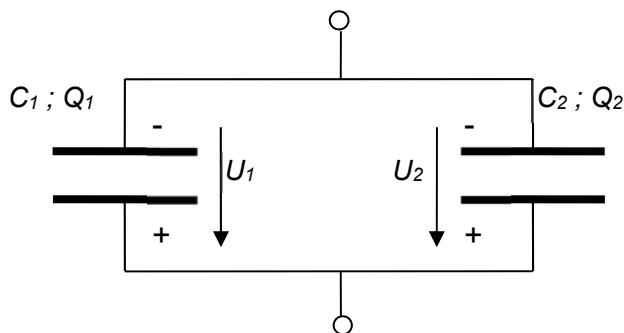
$$U = \frac{P \cdot d}{q}$$

Wartość napięcia obliczymy uwzględniając, że $d = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$, oraz $q = 15 \text{ pC} = 15 \cdot 10^{-12} \text{ C}$

$$U = \frac{10^{-7} \text{ N} \cdot 10^{-2} \text{ m}}{15 \cdot 10^{-12} \text{ C}} = \frac{10^{-9} \cdot 10^{12} \text{ J}}{15 \text{ C}} = \frac{1}{15} \cdot 10^3 \text{ V} = 0,067 \cdot 1000 \text{ V} = 67 \text{ V}$$

Zadanie 6.4 Dwa kondensatory o pojemnościach C_1 i C_2 połączono równolegle. Jakim wzorem wyrazi się pojemność zastępcza układu tych kondensatorów ?

Rozwiązanie:



Ładunek zgromadzony na baterii kondensatorów równy jest sumie ładunków obu kondensatorów:

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

Napięcie między okładkami obu kondensatorów jest takie samo i równe napięciu źródła prądu, zatem:

$$U_1 = U_2 = U$$

Pojemność kondensatora zdefiniowana jest jako stosunek ładunku zgromadzonego na kondensatorze do napięcia między okładkami kondensatora (Q – ładunek jednej okładki):

$$C = \frac{Q}{U},$$

Wykorzystując tę definicję można obliczyć pojemność baterii kondensatorów połączonych równolegle:

$$C_R = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} = C_1 + C_2$$

$$C_R = C_1 + C_2$$

Przy połączeniu równoległym kondensatorów pojemność zastępcza równa jest sumie pojemności kondensatorów tworzących układ.

7. Prąd elektryczny stały

Zadanie 7.1 Korzystając z prawa Ohma wyznacz poszukiwane wielkości. Wyraż poszczególne wartości w odpowiednich jednostkach podstawowych.

- I ($U = 5 \text{ V}$, $R = 20 \Omega$)
- U ($I = 15 \text{ mA}$, $R = 2 \text{ k}\Omega$)

- c) $R (U = 500 \text{ mV}, I = 100 \text{ }\mu\text{A})$
- d) $U (I = 0,5 \text{ A}, R = 0,1 \text{ M}\Omega)$
- e) $I (U = 10 \text{ kV}, R = 5000 \text{ }\Omega)$
- f) $R (U = 2,4 \text{ V}, I = 800 \text{ mA})$

Rozwiązanie:

- a) Wykorzystujemy prawo Ohma w postaci:

$$I = \frac{U}{R}$$

Podstawiając podane wartości otrzymujemy:

$$I = \frac{5 \text{ V}}{20 \text{ }\Omega} = 0,25 \text{ A}$$

- b) Wykorzystujemy prawo Ohma w postaci:

$$U = RI$$

Przed podstawieniem podanych wartości do wzoru przeliczamy jednostki na odpowiednie jednostki podstawowe:

$$15 \text{ mA} = 15 \text{ mA} \cdot \left(\frac{1 \text{ A}}{1000 \text{ mA}} \right) = 0,015 \text{ A}$$

$$2 \text{ k}\Omega = 2 \text{ k}\Omega \cdot \left(\frac{1000 \text{ }\Omega}{1 \text{ k}\Omega} \right) = 2000 \text{ }\Omega$$

Podstawiając wartości do wzoru na napięcie otrzymujemy:

$$U = 2000 \text{ }\Omega \cdot 0,015 \text{ A} = 30 \text{ V}$$

- c) Wykorzystujemy prawo Ohma w postaci:

$$R = \frac{U}{I}$$

Przed podstawieniem podanych wartości do wzoru przeliczamy jednostki na odpowiednie jednostki podstawowe:

$$500 \text{ mV} = 500 \text{ mV} \cdot \left(\frac{1 \text{ V}}{1000 \text{ mV}} \right) = 0,5 \text{ V}$$

$$100 \text{ }\mu\text{A} = 100 \text{ }\mu\text{A} \cdot \left(\frac{1 \text{ A}}{1\,000\,000 \text{ }\mu\text{A}} \right) = 0,0001 \text{ A}$$

Podstawiając wartości do wzoru na rezystancję otrzymujemy:

$$R = \frac{0,5 \text{ V}}{0,0001 \text{ A}} = 5000 \text{ }\Omega$$

- d) Wykorzystujemy prawo Ohma w postaci:

$$U = RI$$

Przed podstawieniem podanych wartości do wzoru przeliczamy jednostki na odpowiednie jednostki podstawowe:

$$0,1 \text{ M}\Omega = 0,1 \text{ M}\Omega \cdot \left(\frac{1\,000\,000 \text{ }\Omega}{1 \text{ M}\Omega} \right) = 100\,000 \text{ }\Omega$$

Podstawiając wartości do wzoru na napięcie otrzymujemy:

$$U = 100\,000 \text{ }\Omega \cdot 0,5 \text{ A} = 50\,000 \text{ V}$$

e) Wykorzystujemy prawo Ohma w postaci:

$$I = \frac{U}{R}$$

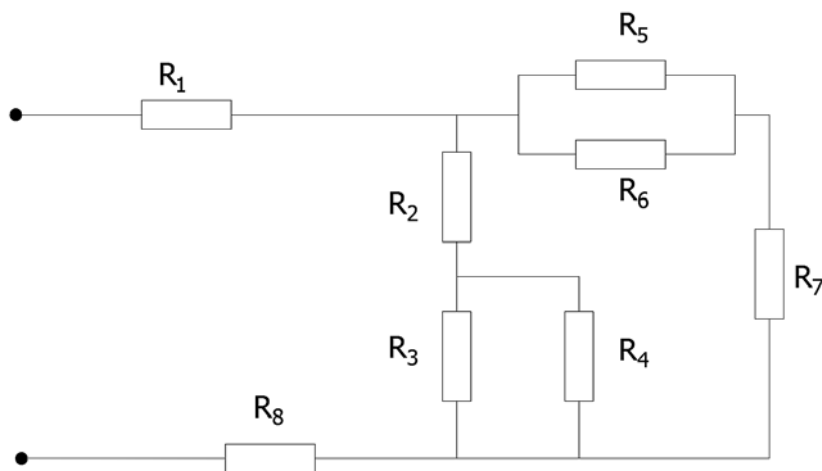
Przed podstawieniem podanych wartości do wzoru przeliczamy jednostki na odpowiednie jednostki podstawowe:

$$10 \text{ kV} = 10 \text{ kV} \cdot \left(\frac{1000 \text{ V}}{1 \text{ kV}} \right) = 10\,000 \text{ V}$$

Podstawiając wartości do wzoru na natężenie prądu otrzymujemy:

$$I = \frac{10\,000 \text{ V}}{5000 \text{ }\Omega} = 10 \text{ A}$$

Zadanie 7.2 Wyznacz rezystancję zastępczą R_z dla przedstawionego fragmentu obwodu.

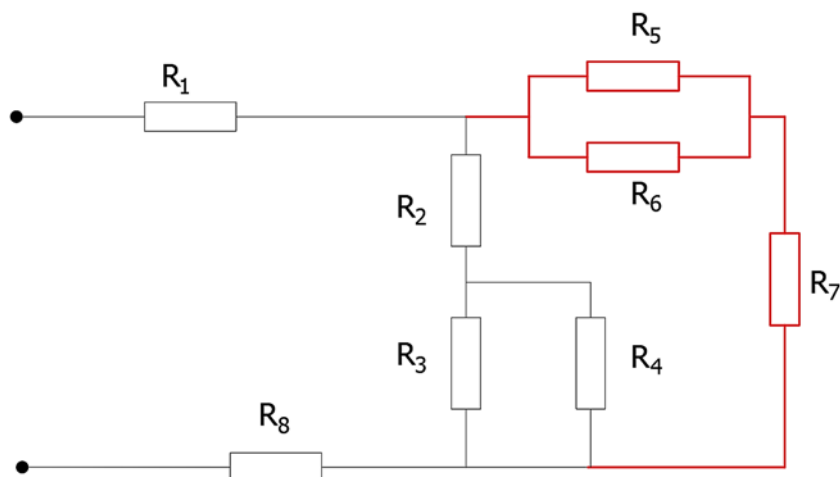


Dane:

$R_1 = 30 \text{ }\Omega$	$R_2 = 9 \text{ }\Omega$
$R_3 = 10 \text{ }\Omega$	$R_4 = 15 \text{ }\Omega$
$R_5 = 20 \text{ }\Omega$	$R_6 = 30 \text{ }\Omega$
$R_7 = 18 \text{ }\Omega$	$R_8 = 20 \text{ }\Omega$

Rozwiązanie:

Wyznaczanie rezystancji zastępczej wymaga uproszczenia przedstawionego fragmentu obwodu. Proces ten należy rozpocząć od gałęzi najbardziej zewnętrznych, znajdujących się najdalej od źródła napięcia lub otwartych zacisków obwodu. Pierwsza gałąź obwodu, która podlega uproszczeniu to:

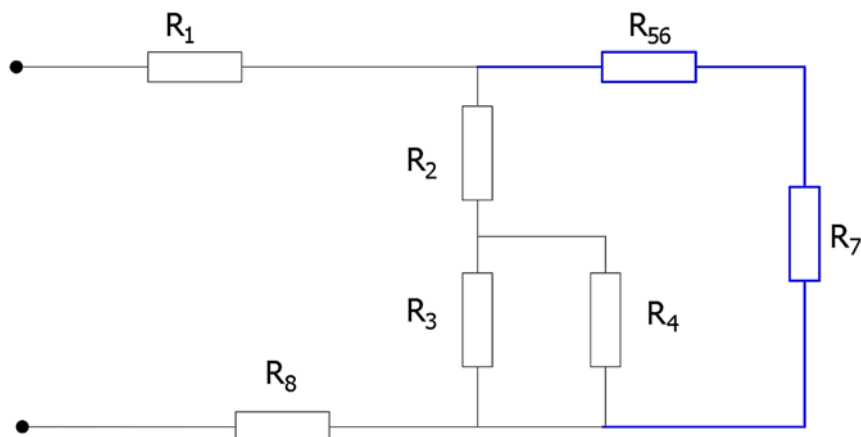


Należy rozpoznać, że oporniki R_5 oraz R_6 połączone są równolegle. Możemy wyznaczyć zastępczą rezystancję R_{56} z następującego wzoru:

$$R_{56} = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6}$$

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy:

$$R_{56} = \frac{20 \, \Omega \cdot 30 \, \Omega}{20 \, \Omega + 30 \, \Omega} = 12 \, \Omega$$

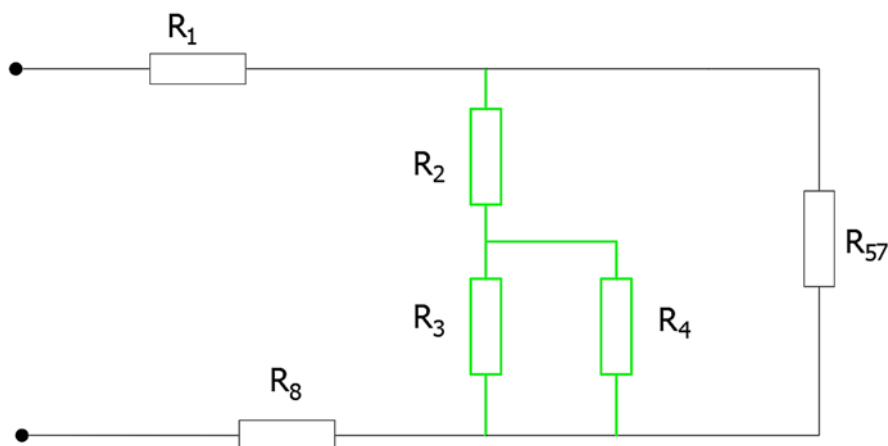


Po pierwszym uproszczeniu można zauważyć, że oporniki R_{56} oraz R_7 połączone są szeregowo. Możemy wyznaczyć zastępczą rezystancję R_{57} z następującego wzoru:

$$R_z = \sum_i^n R_i$$

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy:

$$R_{57} = R_{56} + R_7 = 12 \, \Omega + 18 \, \Omega = 30 \, \Omega$$

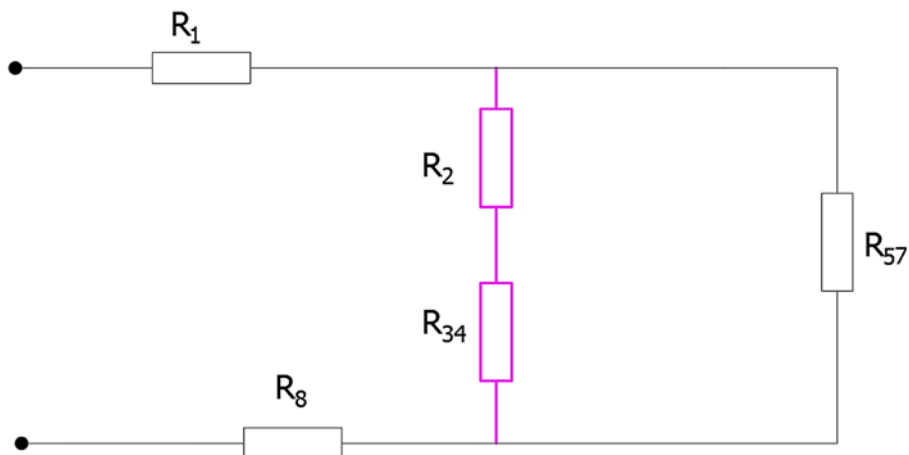


Kolejnym etapem jest uproszczenie fragmentu oznaczonego kolorem zielonym. Należy zauważyć, że oporniki R_3 oraz R_4 połączone są równolegle. Możemy wyznaczyć zastępczą rezystancję R_{34} z następującego wzoru:

$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}$$

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy:

$$R_{34} = \frac{10 \, \Omega \cdot 15 \, \Omega}{10 \, \Omega + 15 \, \Omega} = 6 \, \Omega$$

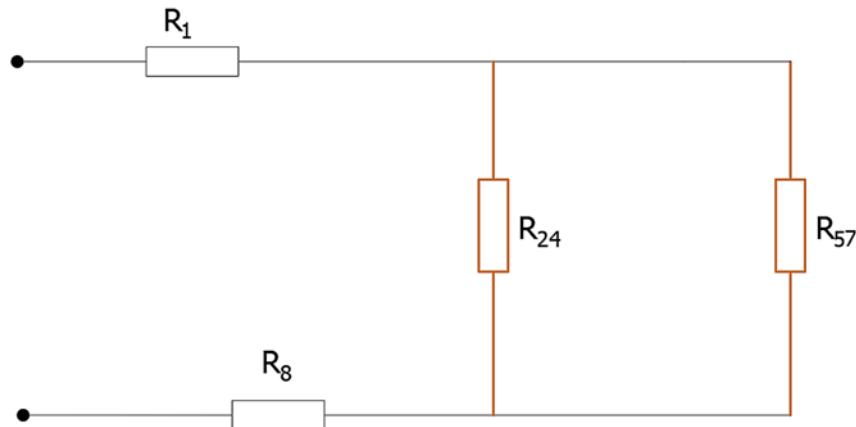


Kolejne uproszczenie skutkuje tym, że oporniki R_2 oraz R_{34} połączone są szeregowo. Możemy wyznaczyć zastępczą rezystancję R_{24} z następującego wzoru:

$$R_z = \sum_i^n R_i$$

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy:

$$R_{24} = R_2 + R_{34} = 9 \, \Omega + 6 \, \Omega = 15 \, \Omega$$

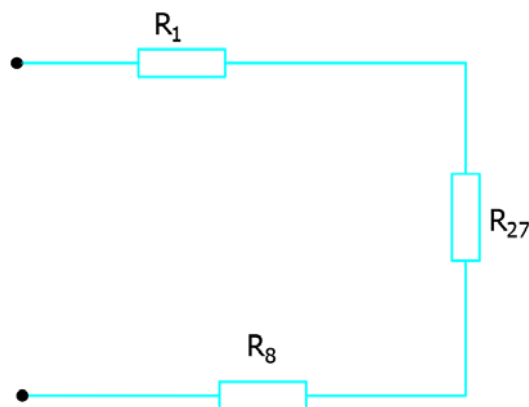


Należy teraz zauważyć, że oporniki R_{24} oraz R_{57} połączone są równolegle. Możemy wyznaczyć zastępczą rezystancję R_{27} z następującego wzoru:

$$R_{27} = \frac{R_{24} \cdot R_{57}}{R_{24} + R_{57}}$$

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy:

$$R_{27} = \frac{15 \, \Omega \cdot 30 \, \Omega}{15 \, \Omega + 30 \, \Omega} = 10 \, \Omega$$

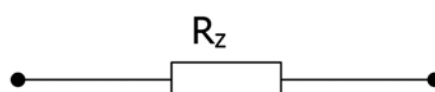


Obwód w obecnej postaci składa się z trzech szeregowo połączonych oporników. Możemy wyznaczyć zastępczą rezystancję R_z całego fragmentu obwodu z następującego wzoru:

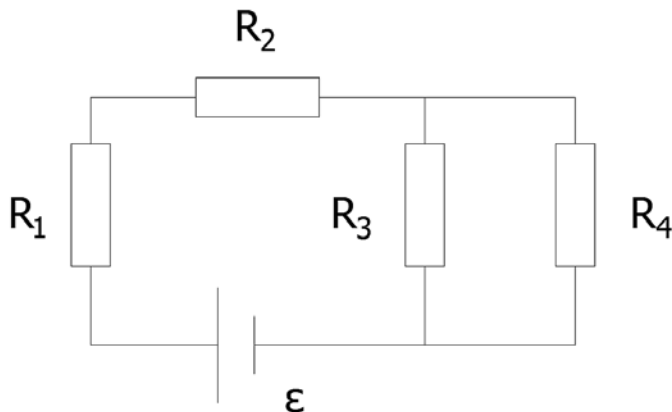
$$R_z = \sum_i^n R_i$$

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy:

$$R_z = R_1 + R_{27} + R_8 = 30 \, \Omega + 10 \, \Omega + 20 \, \Omega = 60 \, \Omega$$



Zadanie 7.3 Oblicz rezystancję zastępczą, napięcie zasilania oraz wartości prądów przepływających przez oporniki w przedstawionym obwodzie prądu stałego.



Dane:

$$R_1 = 31 \, \Omega$$

$$P_2 = 200 \, \text{mW}$$

$$R_2 = 20 \, \Omega$$

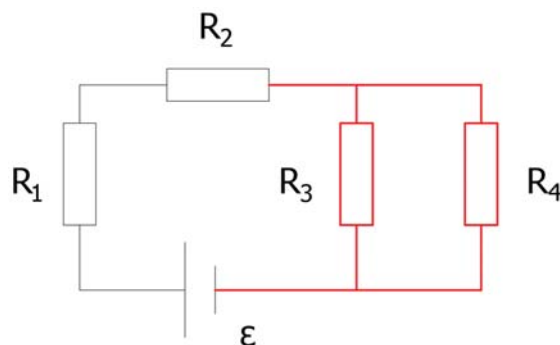
$$U_3 = 0,9 \, \text{V}$$

$$R_4 = 15 \, \Omega$$

Rozwiązanie:

Zadanie to można rozwiązać na kilka sposobów. Poniższe rozwiązanie przedstawia jedną z możliwości.

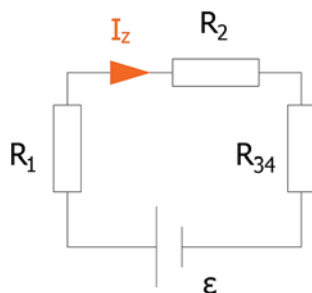
Aby wyznaczyć rezystancję zastępczą obwodu należy sprowadzić go do jak najprostszej postaci. Upraszczanie obwodu należy rozpocząć od gałęzi najbardziej zewnętrznych, znajdujących się najdalej od źródła napięcia. Pierwszy fragment obwodu, która podlega uproszczeniu to:



Należy rozpoznać, że oporniki R_3 oraz R_4 połączone są równolegle. Możemy wyznaczyć zastępczą rezystancję R_{34} z następującego wzoru:

$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}$$

Wartość rezystancji R_3 nie jest jednak znana. Pomijając chwilowo ten fakt uproszczony obwód będzie miał postać:



Uproszczony obwód składa się z jednego źródła napięcia oraz trzech oporników. Wszystkie elementy połączone są szeregowo. Z własności takiego obwodu wiadomo, że przez wszystkie elementy płynie ten sam prąd o stałej wartości – prąd źródłowy I_z . Jego wartość można wyznaczyć na podstawie informacji podanych odnośnie opornika nr 2. Wykorzystujemy w tym celu podstawowy wzór na moc elektryczną:

$$P = UI$$

Ponieważ napięcie U nie jest znane, podstawiamy do powyższego równania wzór na napięcie elektryczne wynikający z prawa Ohma:

$$U = RI$$

Nowy wzór na moc ma postać:

$$P = RI^2$$

Przekształcamy następnie wzór, aby wyznaczyć wartość prądu przepływającą przez opornik:

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

Przed podstawieniem podanych wartości do wzoru przeliczamy jednostki na odpowiednie jednostki podstawowe:

$$200 \text{ mW} = 200 \text{ mW} \cdot \left(\frac{1 \text{ W}}{1000 \text{ mW}} \right) = 0,2 \text{ W}$$

Prąd płynący przez opornik nr 2 ma zatem wartość:

$$I_2 = \sqrt{\frac{0,2 \text{ W}}{20 \Omega}} = 0,1 \text{ A} = I_1 = I_z$$

Ponieważ oporniki R_3 oraz R_4 połączone są równolegle, spadek napięcia w obydwu gałęziach jest jednakowy i równy $U_3 = U_4 = 0,9 \text{ V}$. Zatem spadek napięcia na rezystancji zastępczej R_{34} będzie również wynosił $0,9 \text{ V}$. Do obliczenia tej rezystancji wykorzystamy prawo Ohma w postaci:

$$R = \frac{U}{I}$$

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymamy:

$$R_{34} = \frac{U_{34}}{I_z} = \frac{0,9 \text{ V}}{0,1 \text{ A}} = 9 \Omega$$

Rezystancję zastępczą całego obwodu policzymy ze wzoru:

$$R_z = \sum_i^n R_i$$

Po przekształceniu wzoru i wstawieniu wartości z treści zadania otrzymujemy:

$$R_z = R_1 + R_2 + R_{34} = 31 \Omega + 20 \Omega + 9 \Omega = 60 \Omega$$

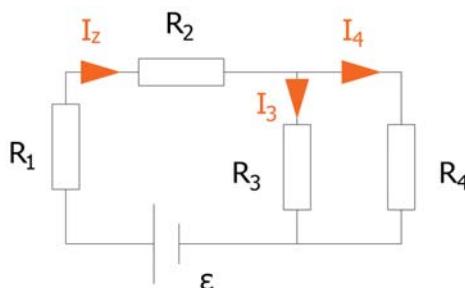
Napięcie źródła ε możemy wyznaczyć z prawa Ohma w postaci:

$$U = RI$$

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymamy:

$$\varepsilon = R_z \cdot I_z = 60 \Omega \cdot 0,1 \text{ A} = 6 \text{ V}$$

Ostatnim etapem zadania jest wyznaczenie prądów przepływających przez opornik R_3 oraz R_4 . Na podstawie I prawa Kirchhoffa wiadomo, że prąd źródłowy wpływający do jednego z węzłów przedstawionego obwodu rozdziela się na dwa inne prądy.



Wartość natężenia prądu I_4 można wyznaczyć z jednej z postaci prawa Ohma:

$$I = \frac{U}{R}$$

Podstawiając wartości otrzymamy:

$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{0,9 \text{ V}}{15 \Omega} = 0,06 \text{ A}$$

Równanie wynikające z I prawa Kirchhoffa dla jednego z węzłów ma postać:

$$I_z = I_3 + I_4$$

Zatem wartość natężenia prądu I_3 wynosi:

$$I_3 = I_z - I_4 = 0,1 \text{ A} - 0,06 \text{ A} = 0,04 \text{ A}$$