



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



NCBR
Narodowe Centrum Badań i Rozwoju

MATERIAŁY DYDAKTYCZNE

do dodatkowych zajęć wyrównawczych z przedmiotu

Matematyka

dla studentów kierunku

Elektrotechnika

Opracował zespół w składzie:

Zbigniew Łagodowski

Iwona Malinowska

Katarzyna Steliga

Lublin 2025 r.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.
Utwór dostępny jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe.

Projekt pn. „*POLLUB zieloną transformację*” realizowany jest w ramach programu Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego 2021-2027 współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego Plus zgodnie z umową nr FERS.01.05-IP.08-0049/23-00.

Funkcje trygonometryczne – rozwiązania przykładowych zadań

Przykład 1. Wykorzystując wzory redukcyjne wyznaczyć wartości funkcji dla podanych argumentów:

a) $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$, b) $\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)$, c) $\operatorname{ctg}\left(\frac{7}{6}\pi\right)$, d) $\operatorname{tg}\left(\frac{7}{4}\pi\right)$.

Rozwiązanie:

Przypomnijmy, wzory redukcyjne umożliwiają obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta za pomocą odpowiednich funkcji trygonometrycznych kąta ostrego. Schemat postępowania przy stosowaniu wzorów redukcyjnych jest następujący:

- 1) Zapisanie argumentu funkcji trygonometrycznej w postaci $m\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- 2) Określenie znaku funkcji trygonometrycznej i zapisanie go po prawej stronie znaku równości. W zapamiętaniu znaków funkcji trygonometrycznych pomocny może być wierszyk: *"W pierwszej ćwiartce same plusy, w drugiej tylko sinus, w trzeciej tangens i cotangens, a w czwartej cosinus."*
- 3) Pozostawienie funkcji bez zmian w przypadku gdy, $m = 2, 4$. Zamiana funkcji na kofunkcję ($\sin \longleftrightarrow \cos$, $\operatorname{tg} \longleftrightarrow \operatorname{ctg}$), jeśli $m = 1, 3$.

Ad a) $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \stackrel{(*)}{=} \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

(*) Ponieważ $\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ należy do drugiej ćwiartki $\left(\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right)$,

więc $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) > 0$. Ponadto $m = 2$ ($\pi = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$), czyli funkcję "pozostawiamy bez zmian".

Zauważmy, że $\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ możemy zapisać w postaci $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$. Zatem

$$\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \stackrel{(\star\star)}{=} \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

($\star\star$) Ponieważ $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, więc $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) > 0$. Ponadto $m = 1$ ($\frac{\pi}{2} = 1 \cdot \frac{\pi}{2}$), więc sinus "zamieniamy" na cosinus.

$$\text{Ad b) } \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \stackrel{(\star)}{=} -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

($\star$) Zauważmy, że $\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, więc $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) < 0$. Dodatkowo $m = 2$ ($\pi = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$), czyli funkcję "pozostawiamy bez zmian".

Odnotujmy, że $\left(\frac{4}{3}\pi\right)$ możemy również zapisać w postaci $\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{6}\right)$. Zatem

$$\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{6}\right) \stackrel{(\star\star)}{=} -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

($\star\star$) Ponieważ $\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, więc $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{6}\right) < 0$. Ponadto $m = 3$ ($\frac{3}{2}\pi = 3 \cdot \frac{\pi}{2}$), czyli cosinus "zamieniamy" na sinus.

$$\text{Ad c) } \text{ctg}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \text{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \stackrel{(\star)}{=} \text{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

($\star$) Ponieważ $\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, więc $\text{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) > 0$. Dodatkowo $m = 2$ ($\pi = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$), czyli funkcję "pozostawiamy bez zmian".

Zauważmy, że $\left(\frac{7}{6}\pi\right)$ możemy także zapisać w postaci $\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{3}\right)$. Zatem

$$\text{ctg}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \text{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{3}\right) \stackrel{(\star\star)}{=} \text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

($\star\star$) Ponieważ $\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{3}\right) \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, więc $\text{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{3}\right) > 0$. Ponadto $m = 3$ ($\frac{3}{2}\pi = 3 \cdot \frac{\pi}{2}$), czyli cotangens "zamieniamy" na tangens.

$$\text{Ad d) } \text{tg}\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \text{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) \stackrel{(\star)}{=} -\text{tg}\frac{\pi}{4} = -1.$$

($\star$) Ponieważ $\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$, więc $\text{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) < 0$. Ponadto $m = 4$ ($2\pi = 4 \cdot \frac{\pi}{2}$), więc funkcję "pozostawiamy bez zmian".

Zauważmy, że $\left(\frac{7}{4}\pi\right)$ możemy zapisać w postaci $\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right)$. Zatem

$$\text{tg}\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \text{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right) \stackrel{(\star\star)}{=} -\text{ctg}\frac{\pi}{4} = -1.$$

($\star\star$) Ponieważ $\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right) \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$, więc $\text{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right) < 0$. Ponadto $m = 3$ ($\frac{3}{2}\pi = 3 \cdot \frac{\pi}{2}$),

więc tangens "zamieniamy" na cotangens.

Przykład 2. Korzystając z okresowości, parzystości lub nieparzystości, wzorów redukcyjnych wyznaczyć wartości funkcji dla podanych argumentów:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \cos\left(\frac{71}{6}\pi\right), & \text{c) } \operatorname{ctg}\left(-\frac{218}{3}\pi\right), & \text{e) } \cos(-1590^\circ), & \text{g) } \operatorname{ctg}(-2310^\circ), \\ \text{b) } \sin\left(-\frac{109}{4}\pi\right), & \text{d) } \operatorname{tg}\left(-\frac{247}{4}\pi\right), & \text{f) } \sin(-3540^\circ), & \text{h) } \operatorname{tg}(3000^\circ). \end{array}$$

Rozwiązanie:

Przypomnijmy, okresem podstawowym funkcji sinus i cosinus jest liczba 2π . Okresem podstawowym funkcji tangens i cotangens jest liczba π . Zachodzą następujące wzory:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin \alpha; \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}, \\ \text{(II)} & \cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos \alpha; \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}, \\ \text{(III)} & \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot \pi) = \operatorname{tg} \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + m\pi : m \in \mathbb{Z}\right\}, k \in \mathbb{Z}, \\ \text{(IV)} & \operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot \pi) = \operatorname{ctg} \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{m\pi : m \in \mathbb{Z}\}, k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Wiadomo, że mierze 2π odpowiada miara 360° , zatem w mierze stopniowej wzory

(I) – (IV) mają postać

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha; \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}, \\ \text{(ii)} & \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha; \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}, \\ \text{(iii)} & \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha; \alpha \neq 90^\circ + m \cdot 180^\circ, m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}, \\ \text{(iv)} & \operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{ctg} \alpha; \alpha \neq m \cdot 180^\circ, m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Funkcja cosinus jest funkcją parzystą, natomiast funkcja sinus, tangens i cotangens są funkcjami nieparzystymi. Zatem

$$\text{(A)} \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha;$$

(B) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$;

(C) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$;

(D) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$.

Ad a) Pierwszy przykład obliczymy na dwa sposoby: 1) korzystając z okresowości funkcji cosinus i ze wzorów redukcyjnych, 2) uwzględniając okresowość i parzystość funkcji cosinus.

$$1) \cos\left(\frac{71}{6}\pi\right) = \cos\left(11\pi + \frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(5 \cdot 2\pi + \frac{11}{6}\pi\right) \stackrel{(II)}{=} \cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ \stackrel{(*)}{=} \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(*) Ze wzorów redukcyjnych, ponieważ $\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$, więc

$\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) > 0$ i $m = 4$ ($2\pi = 4 \cdot \frac{\pi}{2}$), czyli funkcję "pozostawiamy bez zmian".

$$2) \cos\left(\frac{71}{6}\pi\right) \stackrel{(II)}{=} \cos\left(\frac{71}{6}\pi - 6 \cdot 2\pi\right) = \cos\left(\frac{71}{6}\pi - \frac{72}{6}\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \stackrel{(B)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pozostałe przykłady rozwiążemy tylko jednym sposobem. Wybór metody jest subiektywny i zależy od rozwiązującego zadanie.

$$\text{Ad b) } \sin\left(-\frac{109}{4}\pi\right) \stackrel{(A)}{=} -\sin\left(\frac{109}{4}\pi\right) = -\sin\left(26 \cdot 2\pi + \frac{5}{4}\pi\right) \stackrel{(I)}{=} -\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) \\ = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \stackrel{(*)}{=} -\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(*) Ze wzorów redukcyjnych, ponieważ $\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, to $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) < 0$ i $m = 2$ ($\pi = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$), więc funkcję "pozostawiamy bez zmian".

$$\text{Ad c) } \operatorname{ctg}\left(-\frac{218}{3}\pi\right) \stackrel{(IV)}{=} \operatorname{ctg}\left(-\frac{218}{3}\pi + 73\pi\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{218}{3}\pi + \frac{219}{3}\pi\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ad d) } \operatorname{tg}\left(-\frac{247}{4}\pi\right) \stackrel{(III)}{=} \operatorname{tg}\left(-\frac{247}{4}\pi + \frac{248}{4}\pi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$\text{Ad e) } \cos(-1590^\circ) \stackrel{(B)}{=} \cos(1590^\circ) = \cos(4 \cdot 360^\circ + 150^\circ) \stackrel{(ii)}{=} \cos(150^\circ) = \cos(180^\circ - 30^\circ) \stackrel{(*)}{=} \\ -\cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(*) Korzystając ze wzorów redukcyjnych mamy: $(180^\circ - 30^\circ) \in (90^\circ, 180^\circ)$, więc

$\cos(180^\circ - 30^\circ) < 0$ i $m = 2$, $(180^\circ = 2 \cdot 90^\circ)$, czyli funkcję "pozostawiamy bez zmian".

$$\text{Ad f) } \sin(-3540^\circ) \stackrel{(i)}{=} \sin(-3540^\circ + 10 \cdot 360^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ad g) } \text{ctg}(-2310^\circ) \stackrel{(D)}{=} -\text{ctg}(2310^\circ) = -\text{ctg}(150^\circ + 12 \cdot 180^\circ) \stackrel{(iv)}{=} -\text{ctg}(150^\circ) = -\text{ctg}(180^\circ - 30^\circ) \stackrel{(*)}{=} -(-\text{ctg}(30^\circ)) = \sqrt{3}.$$

(*) Ze wzorów redukcyjnych: $(180^\circ - 30^\circ) \in (90^\circ, 180^\circ)$, czyli

$\text{ctg}(180^\circ - 30^\circ) < 0$ i $m = 2$, $(180^\circ = 2 \cdot 90^\circ)$, więc funkcję "pozostawiamy bez zmian".

$$\text{Ad h) } \text{tg}(3000^\circ) \stackrel{(iii)}{=} \text{tg}(3000^\circ - 17 \cdot 180^\circ) = \text{tg}(3000^\circ - 3060^\circ) = \text{tg}(-60^\circ) \stackrel{(C)}{=} -\text{tg}(60^\circ) = -\sqrt{3}.$$

Przykład 3. Obliczyć:

a) $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right),$

b) $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right),$

c) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right).$

Rozwiązanie:

Przypomnijmy, że jeśli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ to zachodzą następujące wzory

$$(1) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$(2) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$(3) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$(4) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Ad a) Zauważmy, że $\frac{7\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$. Wobec tego

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \stackrel{(1)}{=} \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1).$$

Ad b) Zauważmy, że $\frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$. Wobec tego

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \stackrel{(3)}{=} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1).$$

Ad c) Przypomnijmy, że zachodzi następująca tożsamość trygonometryczna

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Zauważmy, że $\frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$. Wobec tego

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{12} \right) &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right)} \stackrel{(2),(4)}{=} \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Przykład 4. Zbadać, parzystość/ nieparzystość funkcji:

a) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$,

b) $f(x) = \sin x - \cos x$.

Rozwiązanie:

Przypomnijmy, funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją parzystą w zbiorze D , $D \subseteq X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x \in D} (-x \in D \wedge f(-x) = f(x)).$$

Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją nieparzystą w zbiorze D , $D \subseteq X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x \in D} (-x \in D \wedge f(-x) = -f(x)).$$

Ad a) Dziedziną funkcji tangens jest zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem liczb postaci $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Podobnie, dziedziną funkcji cotangens jest zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem liczb postaci $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Zatem:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot k : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



Dziedzina jest zbiorem symetrycznym względem zera na osi OX , zatem dla dowolnego $x \in D_f$ również $(-x) \in D_f$. Niech $x \in D_f$ będzie dowolnie wybrany. Wtedy:

$$f(-x) = \operatorname{tg}(-x) + \operatorname{ctg}(-x) \stackrel{(C),(D)}{=} -\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = -f(x).$$

Badana funkcja jest nieparzysta.

Ad b) Ponieważ zarówno funkcja sinus jak i funkcja cosinus określone są dla wszystkich liczb rzeczywistych, więc dziedziną funkcji $f(x) = \sin x - \cos x$ jest $\mathbb{R}$. Zatem dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, również $(-x) \in \mathbb{R}$. Niech $x \in \mathbb{R}$ będzie dowolnie wybrany. Wtedy:

$$f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) \stackrel{(A),(B)}{=} -\sin x - \cos x = -(\sin x + \cos x) \neq f(x).$$

Zauważmy, że

$$-f(x) = -(\sin x - \cos x) \neq f(-x).$$

Badana funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta.

Przykład 5. Obliczyć okres podstawowy funkcji

a) $f(x) = \operatorname{tg}(4x)$,

b) $f(x) = \sin\left(\frac{2}{5}\pi x - 3\right)$.

Rozwiązanie:

Przypomnijmy, funkcję f nazywamy funkcją okresową w zbiorze X , wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigvee_{T \neq 0} \bigwedge_{x \in X} ((x + T) \in X \wedge f(x + T) = f(x)), \quad T - \text{okres funkcji } f.$$

Najmniejszy dodatni okres funkcji f nazywamy okresem podstawowym.

Ad a) Zauważmy, że $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z} \right\}$. Możemy znaleźć T , że dla dowolnego



$x \in D_f$ prawdziwy jest pierwszy czynnik koniunkcji. Niech T_0 oznacza okres podstawowy funkcji f . Wtedy

$$f(x + T_0) = \operatorname{tg}(4(x + T_0)) = \operatorname{tg}(4x + 4T_0).$$

Ponieważ funkcja f jest okresowa, więc $f(x + T_0) = f(x)$, zatem $\operatorname{tg}(4x + 4T_0) = \operatorname{tg}(4x)$.

Niech $4x := \alpha$, wtedy $\operatorname{tg}(\alpha + 4T_0) = \operatorname{tg}(\alpha)$.

Ponieważ okresem podstawowym funkcji tangens jest liczba π , więc $4T_0 = \pi$. Wobec tego $T_0 = \frac{\pi}{4}$.

Okresem podstawowym funkcji $f(x) = \operatorname{tg}(4x)$ jest liczba $\frac{\pi}{4}$.

Ad b) Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych. Zatem pierwszy warunek definicyjny jest spełniony dla dowolnego T . Oznaczmy, przez T_0 okres podstawowy funkcji f . Wówczas

$$f(x + T_0) = \sin\left(\frac{2}{5}\pi(x + T_0) - 3\right) = \sin\left(\frac{2}{5}\pi x - 3 + \frac{2}{5}\pi T_0\right).$$

Ponieważ funkcja f jest okresowa, więc $f(x + T_0) = f(x)$, zatem

$$\sin\left(\left(\frac{2}{5}\pi x - 3\right) + \frac{2}{5}\pi T_0\right) = \sin\left(\frac{2}{5}\pi x - 3\right).$$

Podstawmy $\frac{2}{5}\pi x - 3 := \alpha$, wówczas $\sin\left(\alpha + \frac{2}{5}\pi T_0\right) = \sin(\alpha)$.

Ponieważ okresem podstawowym funkcji sinus jest liczba 2π , więc $\frac{2}{5}\pi T_0 = 2\pi$. Stąd $T_0 = 5$.

Okresem podstawowym funkcji $f(x) = \sin\left(\frac{2}{5}\pi x - 3\right)$ jest liczba 5.

Przykład 6. Narysować wykresy funkcji:

a) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right);$

c) $f(x) = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$

b) $f(x) = 3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right);$

d) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(-x + \frac{\pi}{2}\right).$

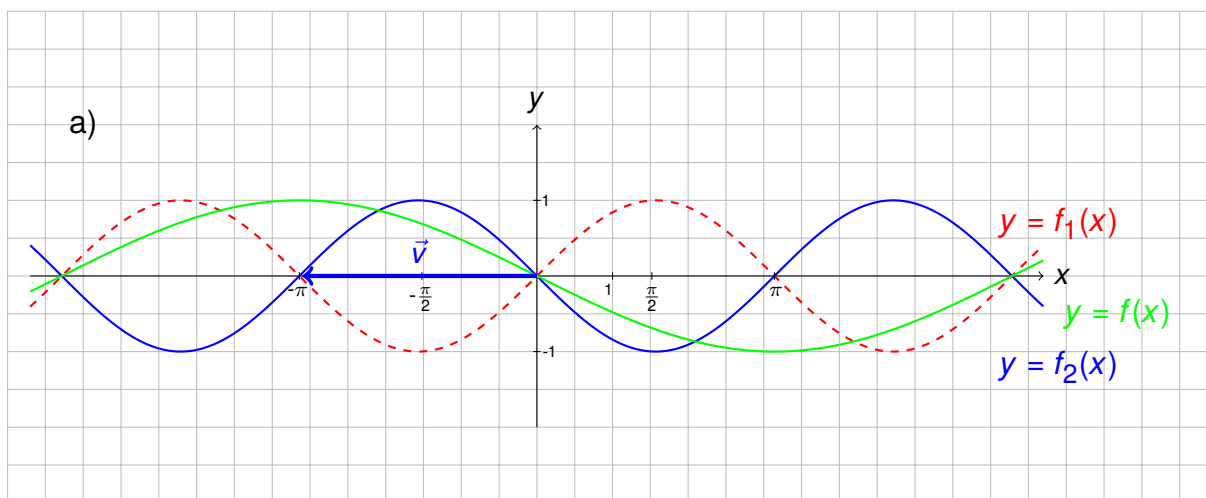
Rozwiązanie:

Ad a) Dziedziną naturalną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych. Chcemy otrzymać wykres funkcji f poprzez przekształcenia wykresu funkcji sinus.

Niech:

- $f_1(x) = \sin x$ wtedy
- $f_2(x) = f_1(x + \pi)$. Wykres funkcji f_2 powstaje w wyniku translacji wykresu funkcji f_1 o wektor $\vec{v} = [-\pi, 0]$.
- $f(x) = f_2\left(\frac{x}{2}\right)$. Wykres funkcji f powstaje w wyniku powinowactwa prostokątnego wykresu funkcji f_2 o osi OY w skali 2.

Ilustracja graficzna kolejnych przekształceń przedstawiona jest poniżej.



Zauważmy, że wykres funkcji f możemy otrzymać stosując te same przekształcenia co poprzednio, ale w innej kolejności. W tym celu przekształćmy wzór funkcji f do postaci

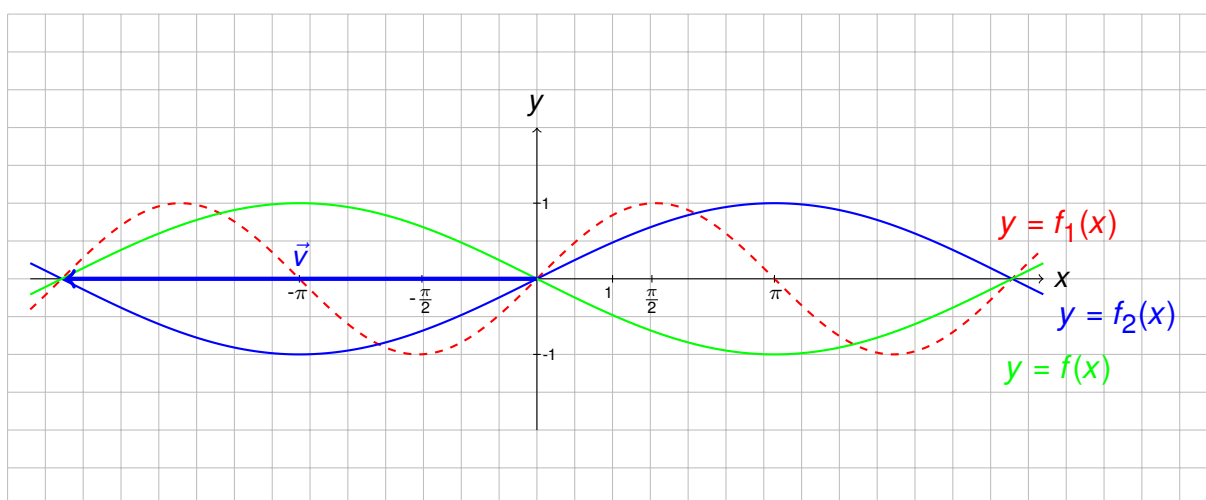
$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}(x + 2\pi)\right).$$

Podobnie, niech

- $f_1(x) = \sin x$ wtedy

- $f_2(x) = f_1\left(\frac{x}{2}\right)$. Wykres funkcji f_2 powstaje przez powinowactwo prostokątne wykresu funkcji f_1 o osi OY w skali 2.
- $f(x) = f_2(x + 2\pi)$ Wykres funkcji f powstaje w wyniku translacji wykresu funkcji f_2 o wektor $\vec{v} = [-2\pi, 0]$.

Ilustracja graficzna kolejnych przekształceń przedstawiona jest poniżej.

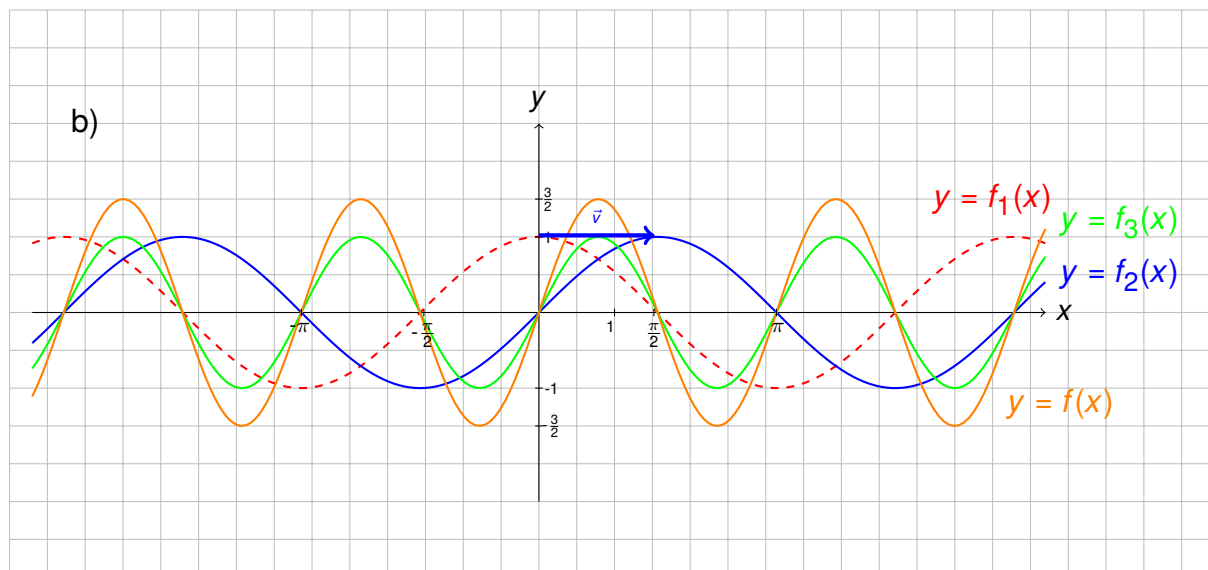


Ad b) Dziedziną naturalną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych. Chcemy naszkicować wykres funkcji f poprzez przekształcenia wykresu funkcji cosinus.

Niech:

- $f_1(x) = \cos x$ wtedy
- $f_2(x) = f_1\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Wykres funkcji f_2 powstaje w wyniku translacji wykresu funkcji f_1 o wektor $\vec{v} = \left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$.
- $f_3(x) = f_2(2x)$. Wykres funkcji f_3 powstaje w wyniku powinowactwa prostokątnego wykresu funkcji f_2 o osi OY w skali $\frac{1}{2}$.
- $f(x) = 3f_3(x)$. Wykres funkcji f powstaje w wyniku powinowactwa prostokątnego wykresu funkcji f_3 o osi OX w skali 3.

Ilustracja graficzna kolejnych przekształceń przedstawiona jest poniżej.



Ad c) Wiadomo, że funkcja tangens nie jest określona dla liczb postaci $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Zatem dziedziną naturalną funkcji $f(x) = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ jest zbiór

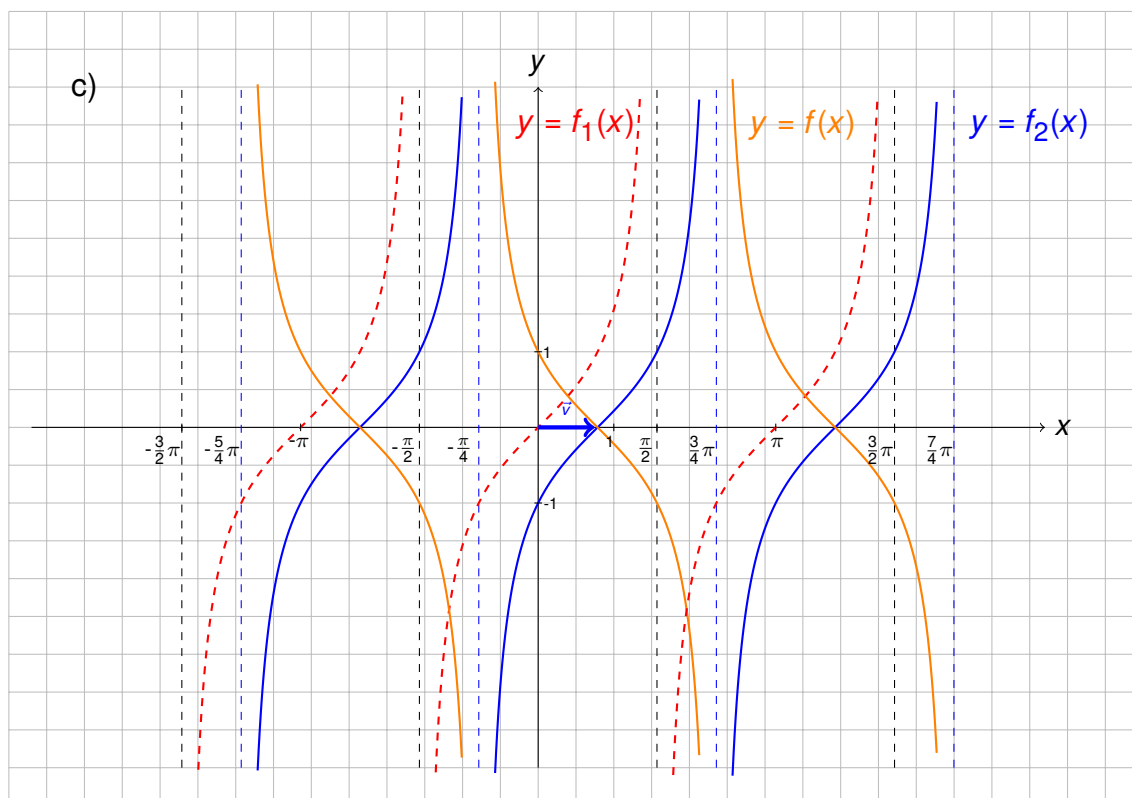
$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Chcemy naszkicować wykres funkcji f poprzez przekształcenia wykresu funkcji tangens.
Nasze rozważania ograniczymy do zbioru $\left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$.

Niech:

- $f_1(x) = \operatorname{tg} x$ wtedy
- $f_2(x) = f_1\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Wykres funkcji f_2 powstaje w wyniku translacji wykresu funkcji f_1 o wektor $\vec{v} = \left[\frac{\pi}{4}, 0\right]$.
- $f(x) = -f_2(x)$. Wykres funkcji f powstaje poprzez symetrię względem osi OX wykresu funkcji f_2 .

Ilustracja graficzna kolejnych przekształceń przedstawiona jest poniżej.



Ad d) Wiadomo, że funkcja cotangens nie jest określona dla liczb mających postać $\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Zatem dziedziną naturalną funkcji $f(x) = \text{ctg} \left(-x + \frac{\pi}{2} \right)$ jest zbiór

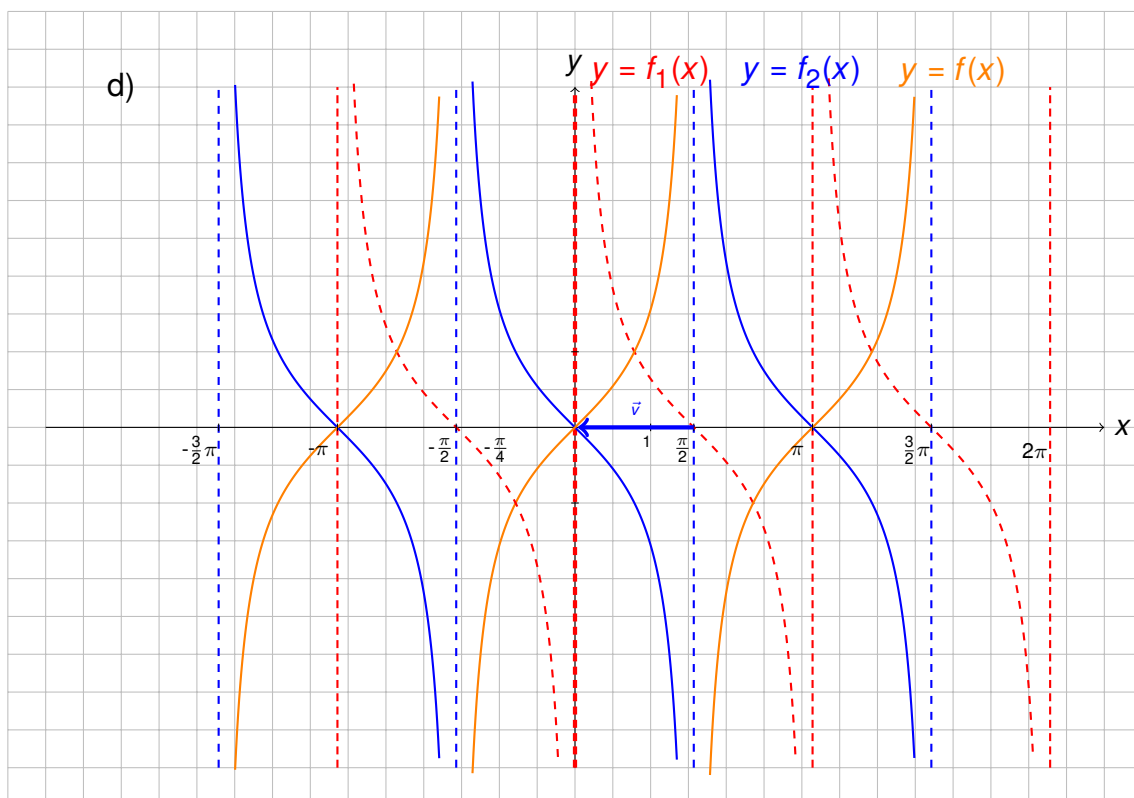
$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : -x + \frac{\pi}{2} \neq \pi + k\pi \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} - k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Chcemy naszkicować wykres funkcji f poprzez przekształcenia wykresu funkcji cotangens.

Niech:

- $f_1(x) = \text{ctg } x$ wtedy
- $f_2(x) = f_1 \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$. Wykres funkcji f_2 powstaje w wyniku translacji wykresu funkcji f_1 o wektor $\vec{v} = \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right]$.
- $f(x) = f_2(-x)$. Wykres funkcji f powstaje poprzez symetrię względem osi OY wykresu funkcji f_2 .

Ilustracja graficzna kolejnych przekształceń przedstawiona jest poniżej.



Zauważmy, że ze wzorów redukcyjnych $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \operatorname{tg} x$.

Zatem w wyniku powyższych przekształceń wykresu funkcji $f_1(x) = \operatorname{ctg} x$ otrzymaliśmy wykres funkcji $\operatorname{tg} x$ dla $x \in \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2} \right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right)$.

Przykład 7.

Rozwiązać równanie:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $-2 \sin^2 x + 5 \cos x + 4 = 0$;

c) $\operatorname{tg}^3 x = 3 \operatorname{tg} x$;

d) $\sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = -3$.

Rozwiązanie:

Ad a) Dziedziną naturalną równania jest zbiór liczb rzeczywistych.

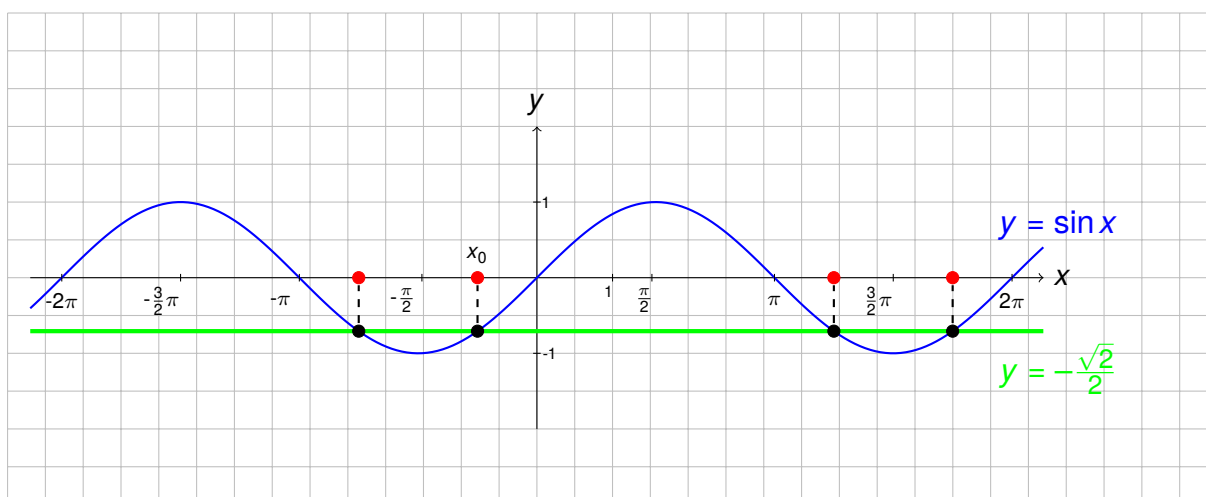


This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.
Utwór dostępny jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe.

Przypomnijmy, równanie $\sin x = a$, $a \in \langle -1, 1 \rangle$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które możemy zapisać w postaci

$$x = x_0 + 2k\pi \vee x = \pi - x_0 + 2k\pi, \text{ gdzie } \sin x_0 = a \wedge x_0 \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \wedge k \in \mathbb{Z}.$$

W jednym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji $y = \sin x$ i $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Chcemy wyznaczyć punkty przecięcia się tych krzywych. Interesują nas odcięte tych punktów, które są rozwiązaniem równania. Przez x_0 oznaczamy to rozwiązanie równania $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, które należy do przedziału $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.



Ponieważ $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc $\sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) \stackrel{(A)}{=} -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Zatem $x_0 = -\frac{\pi}{4}$. Wobec tego

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ad b) Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych. Wykorzystamy tożsamość trygonometryczną, zwaną jedynką trygonometryczną

$$(JT) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$-2 \sin^2 x + 5 \cos x + 4 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \stackrel{(JT)}{\Leftrightarrow}$$

$$-2(1 - \cos^2 x) + 5 \cos x + 4 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\cos x = t \wedge t \in \langle -1, 1 \rangle \wedge 2t^2 + 5t + 2 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\cos x = t \wedge t \in \langle -1, 1 \rangle \wedge 2 \left(t + \frac{1}{2} \right) (t + 2) = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\left(t = -2 \vee t = -\frac{1}{2} \right) \wedge t \in \langle -1, 1 \rangle \wedge t = \cos x \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

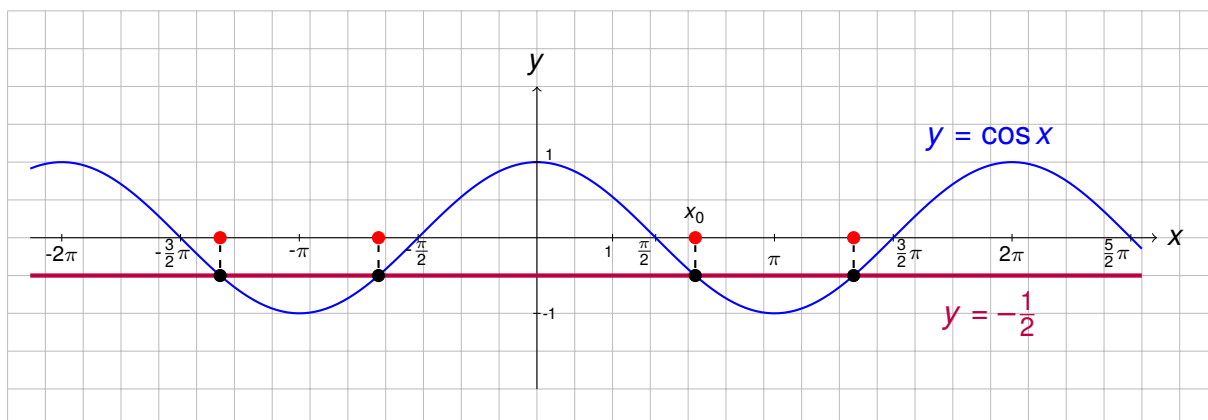
$$\left[(t = -2 \wedge t \in \langle -1, 1 \rangle) \vee \left(t = -\frac{1}{2} \wedge t \in \langle -1, 1 \rangle \right) \right] \wedge t = \cos x \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$t = -\frac{1}{2} \wedge t = \cos x \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \wedge x \in \mathbb{R}.$$

Przypomnijmy, równanie $\cos x = a$, $a \in \langle -1, 1 \rangle$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w postaci

$$x = x_0 + 2k\pi \vee x = -x_0 + 2k\pi, \text{ gdzie } \cos x_0 = a \wedge x_0 \in \langle 0, \pi \rangle \wedge k \in \mathbb{Z}.$$

W jednym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji $y = \cos x$ i $y = -\frac{1}{2}$. Przez x_0 oznaczamy to rozwiązanie równania $\cos x = -\frac{1}{2}$, które należy do przedziału $\langle 0, \pi \rangle$.



Z rysunku odczytujemy, że liczba x_0 może być przedstawiona w postaci $x_0 = \frac{\pi}{2} + \alpha$, gdzie $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Wobec tego

$$\begin{aligned}\cos x_0 = -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{2} \wedge \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} -\sin \alpha = -\frac{1}{2} \wedge \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \wedge \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

(*) korzystamy ze wzoru redukcyjnego.

Zatem $x_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$. Stąd

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ad c) Dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

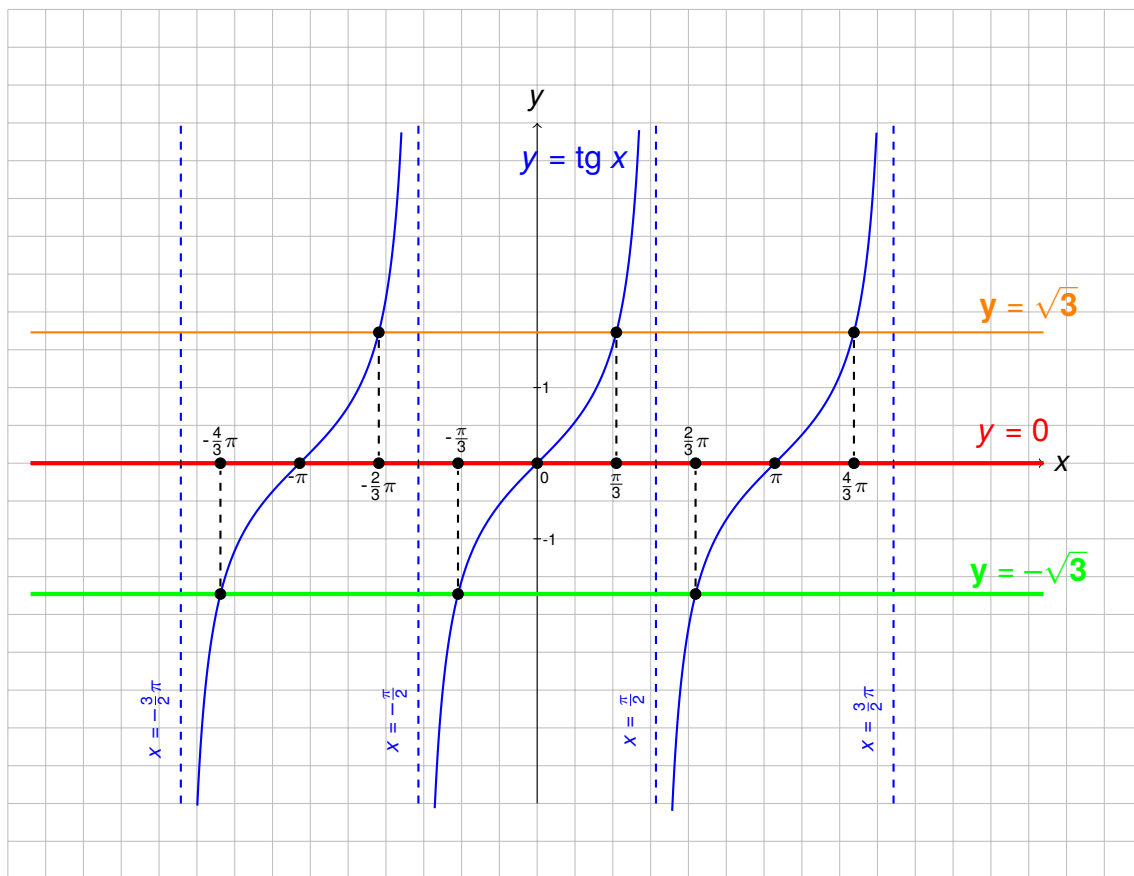
Przypomnijmy, równanie $\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które możemy zapisać w postaci

$$x = x_0 + k\pi, \text{ gdzie } \operatorname{tg} x_0 = a \wedge x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \wedge k \in \mathbb{Z}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^3 x &= 3\operatorname{tg} x \wedge x \in D \Leftrightarrow \\ \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg}^2 x - 3) &= 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow \\ \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) \cdot (\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) &= 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow \\ (\operatorname{tg} x = 0 \vee \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \vee \operatorname{tg} x = \sqrt{3}) &\wedge x \in D.\end{aligned}$$

W jednym układzie współrzędnych rysujemy wykresy funkcji $y = \operatorname{tg} x$, $y = -\sqrt{3}$, $y = 0$, $y = \sqrt{3}$.



Posługując się wykresem, można odczytać, że $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}$.

Wiadomo, że $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, zatem $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}$.

Ponadto, z nieparzystości funkcji tangens ((C)) dostajemy, $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$.

Wobec tego $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}$.

Na podstawie powyższych rozważań otrzymujemy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^3 x = 3 \operatorname{tg} x \wedge x \in D &\Leftrightarrow \left(x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi \right) \wedge k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = k \frac{\pi}{3} \wedge k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ad d) Dziedziną równania jest zbiór

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi \wedge k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

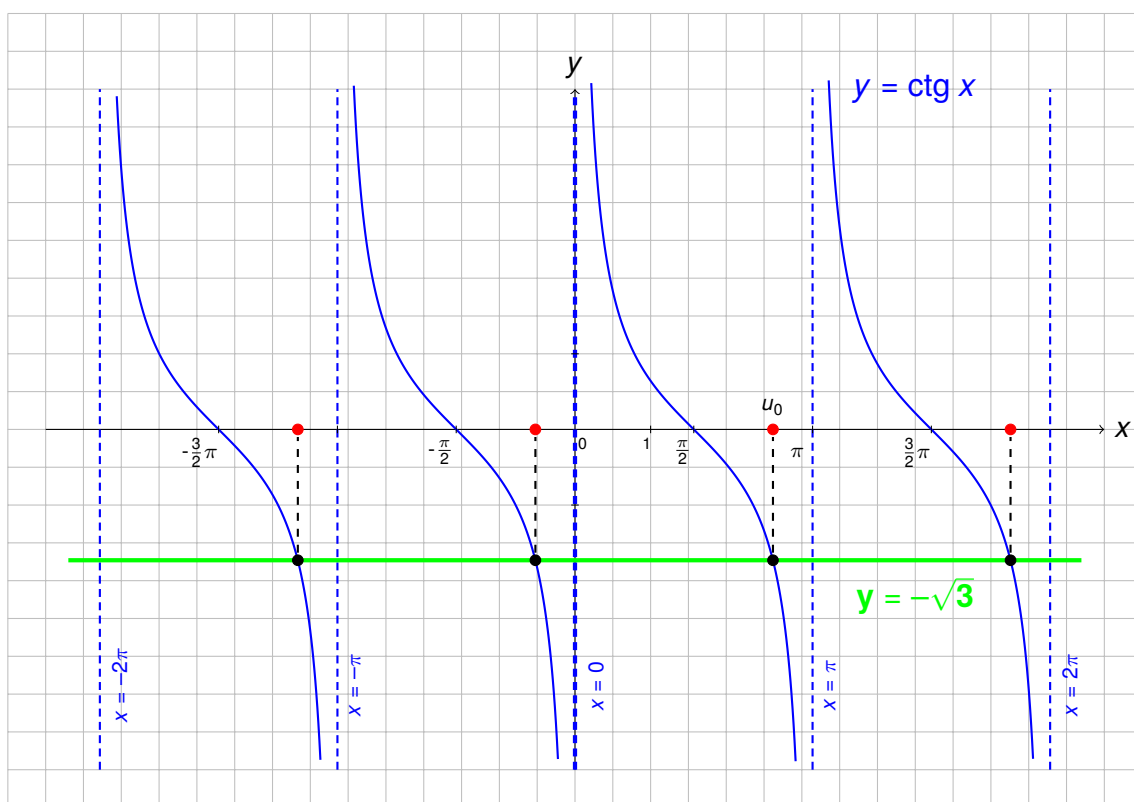
Niech $x - \frac{\pi}{3} = u$, $u \in \mathbb{R}$ wtedy

$$\sqrt{3} \operatorname{ctg} u = -3 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} u = -\frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} u = -\sqrt{3}.$$

Przypomnijmy, równanie $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w postaci

$$x = x_0 + k\pi, \text{ gdzie } \operatorname{ctg} x_0 = a \wedge x_0 \in (0, \pi) \wedge k \in \mathbb{Z}.$$

Naszukujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ i $y = -\sqrt{3}$.



Niech u_0 oznacza to rozwiązanie równania $\operatorname{ctg} u = -\sqrt{3}$, które należy do przedziału $(0, \pi)$.

Z rysunku odczytujemy, że liczba u_0 może być przedstawiona w postaci $x_0 = \pi - \alpha$, gdzie

$\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Wobec tego

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} u_0 = -\sqrt{3} &\Leftrightarrow \operatorname{ctg} (\pi - \alpha) = -\sqrt{3} \wedge \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} -\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3} \wedge \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3} \wedge \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

(*) korzystamy ze wzoru redukcyjnego.

Zatem $u_0 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$. Stąd

$$\operatorname{ctg} u = -\sqrt{3} \Leftrightarrow u = \frac{5}{6}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Biorąc pod uwagę powyższe rozważania dostajemy

$$\operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{7}{6}\pi + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}.$$

Przykład 8. Znaleźć zbiór rozwiązań nierówności:

- a) $\sin x \geq \frac{1}{2}$, $(\bullet) x \in \mathbb{R}$, $(\bullet\bullet) x \in \left\langle -\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \right\rangle$;
- b) $\cos^2 x - 6 \cdot \cos x < 0$, $(\bullet) x \in \mathbb{R}$, $(\bullet\bullet) x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$;
- c) $\operatorname{tg}^2 x \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$;
- d) $\sin x + 3 \cdot \operatorname{ctg} x \leq 3 + \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:

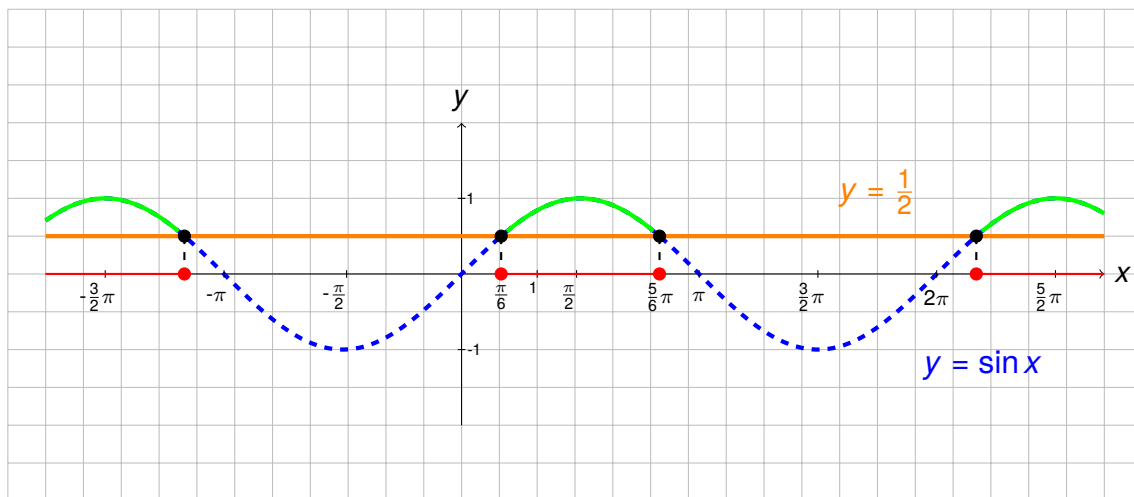
Ad a) $(\bullet)$ Dziedziną nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie nierówności rozpoczynamy od znalezienia zbioru rozwiązań równania trygonometrycznego $\sin x = \frac{1}{2}$.

Wiadomo, że $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \wedge \frac{\pi}{6} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, więc

$$\sin x = \frac{1}{2} \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rysujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = \sin x$ i $y = \frac{1}{2}$.



Znając rozwiązanie równania i korzystając ze szkicu wykresu możemy skonstruować zbiór rozwiązań nierówności $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

W zbiorze liczb rzeczywistych nierówność jest spełniona, gdy x należy do sumy przedziałów postaci $\left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$. Zatem

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle.$$

(••) Dziedziną nierówności jest przedział $\left\langle -\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \right\rangle$. Musimy zatem zawęzić zbiór rozwiązań nierówności do tego przedziału, tzn:

$$\begin{aligned} \sin x \geq \frac{1}{2} \wedge x \in \left\langle -\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \right\rangle &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle \cap \left\langle -\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \right\rangle \\ &\Leftrightarrow x \in \left\langle -\frac{3}{2}\pi, -\frac{7}{6}\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{13}{6}\pi, \frac{5}{2}\pi \right\rangle. \end{aligned}$$

Ad b) (•) Dziedziną nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych. Przekształcając dostajemy

$$\cos^2 x - 6 \cdot \cos x < 0 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x \cdot (\cos x - 6) < 0 \wedge x \in \mathbb{R}.$$

Wiadomo, że

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} -1 \leq \cos x \leq 1, \quad \text{więc} \quad \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} -7 \leq \cos x - 6 \leq -5.$$

Zatem

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \cos x - 6 < 0.$$

Wobec tego

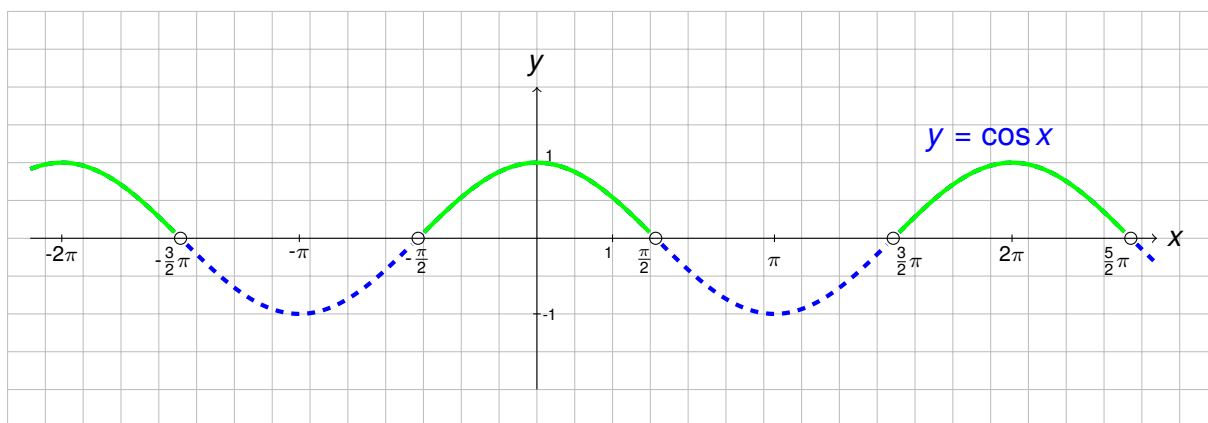
$$\cos x \cdot (\cos x - 6) < 0 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x > 0 \wedge x \in \mathbb{R}.$$

Wyznaczenie zbioru rozwiązań powyższej nierówności rozpoczynamy od rozwiązania równania.

Stąd

$$\cos x = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Szkicujemy następnie wykres cosinusa i z rysunku odczytujemy zbiór tych argumentów dla których $\cos x > 0$.



Zatem funkcja cosinus przyjmuje wartości dodatnie w zbiorze liczb rzeczywistych, gdy x należy do sumy przedziałów postaci $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Wobec tego

$$\cos^2 x - 6 \cos x < 0 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right).$$

(••) Dziedziną nierówności jest przedział $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$. Musimy zatem zawęzić zbiór rozwiązań wyjściowej nierówności do tego przedziału, tzn.

$$\begin{aligned} \cos^2 x - 6 \cos x < 0 \wedge x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \cap \langle -2\pi, 2\pi \rangle \\ &\Leftrightarrow x \in \left\langle -2\pi, -\frac{3}{2}\pi \right\rangle \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi \right). \end{aligned}$$

Ad c) Dziedziną nierówności jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x \geq 1 \wedge x \in D &\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = t \wedge t \in \mathbb{R} \wedge t^2 - 1 \geq 0 \wedge x \in D \\ &\Leftrightarrow (t-1)(t+1) \geq 0 \wedge t = \operatorname{tg} x \wedge t \in \mathbb{R} \wedge x \in D \\ &\Leftrightarrow t \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \wedge t = \operatorname{tg} x \wedge t \in \mathbb{R} \wedge x \in D \\ &\Leftrightarrow (t \leq -1 \vee t \geq 1) \wedge t = \operatorname{tg} x \wedge x \in D \\ &\Leftrightarrow (\operatorname{tg} x \leq -1 \vee \operatorname{tg} x \geq 1) \wedge x \in D. \end{aligned}$$

Wiadomo, że $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \wedge \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, zatem

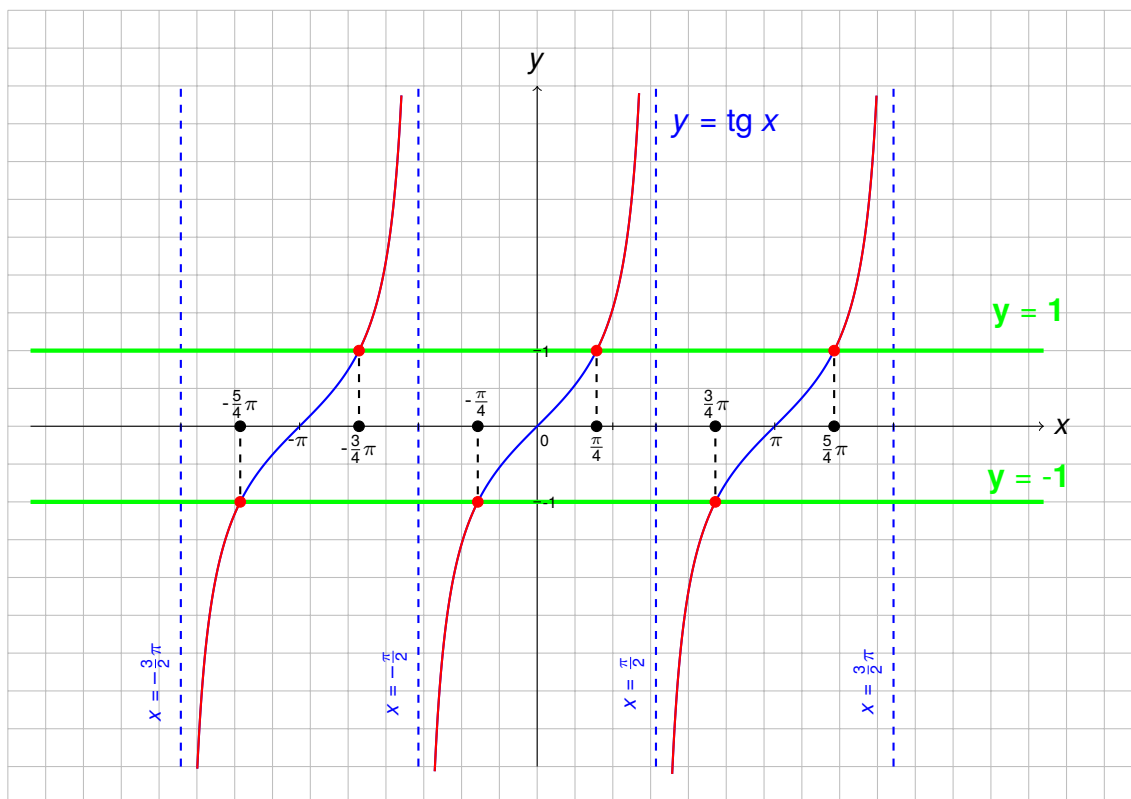
$$\operatorname{tg} x = 1 \wedge x \in D \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}.$$

Ponadto z nieparzystości funkcji tangens ((C)) dostajemy, $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

Wobec tego

$$\operatorname{tg} x = -1 \wedge x \in D \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}.$$

W jednym układzie współrzędnych rysujemy wykresy funkcji $y = \operatorname{tg} x$, $y = -1$ i $y = 1$.



Posiadając rozwiązanie równań i korzystając ze szkicu wykresu możemy skonstruować zbiór rozwiązań nierówności:

$$\operatorname{tg} x \leq -1 \wedge x \in D \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi \right)$$

oraz

$$\operatorname{tg} x \geq 1 \wedge x \in D \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right).$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x \geq 1 \wedge x \in D &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi \right) \vee x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi \right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right). \end{aligned}$$

Ad d) Dziedziną nierówności jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Wykonując równoważne przekształcenia dostajemy

$$\begin{aligned} \sin x + 3 \cdot \operatorname{ctg} x &\leq 3 + \cos x \wedge x \in D \Leftrightarrow \\ \sin x + 3 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - 3 - \cos x &\leq 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow \\ \frac{\sin^2 x + 3 \cdot \cos x - 3 \cdot \sin x - \sin x \cdot \cos x}{\sin x} &\leq 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow \\ \frac{\sin x \cdot (\sin x - 3) + \cos x \cdot (3 - \sin x)}{\sin x} &\leq 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow \\ \frac{(3 - \sin x) \cdot (\cos x - \sin x)}{\sin x} &\leq 0 \wedge x \in D. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} 2 \leq 3 - \sin x \leq 4.$$

Zatem

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} 3 - \sin x > 0.$$

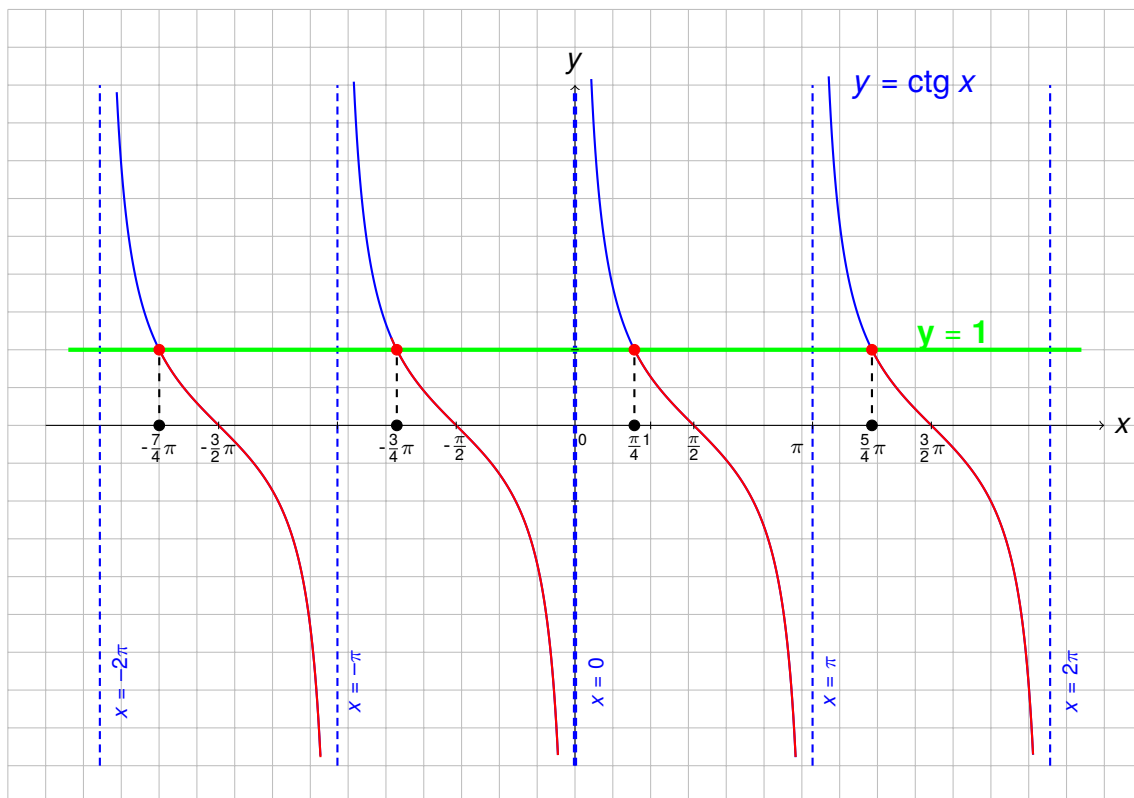
Wobec tego

$$\begin{aligned} \frac{(3 - \sin x) \cdot (\cos x - \sin x)}{\sin x} &\leq 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow \\ \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} &\leq 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow \\ \operatorname{ctg} x - 1 &\leq 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x \leq 1 \wedge x \in D. \end{aligned}$$

Wiadomo, że $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1 \wedge \frac{\pi}{4} \in (0, \pi)$, zatem

$$\operatorname{ctg} x = 1 \wedge x \in D \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}.$$

W jednym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ i $y = 1$.



Z wykresu odczytujemy, że zbiorem rozwiązań nierówności $\text{ctg } x \leq 1$ jest suma przedziałów postaci $\left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi, \pi + k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$. Wobec tego

$$\sin x + 3 \cdot \text{ctg } x \leq 3 + \cos x \wedge x \in D \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi, \pi + k\pi \right\rangle.$$



Równania wykładnicze – rozwiązania przykładowych zadań

Zanim przystąpimy do rozwiązywania przykładowych zadań przypomnijmy własności potęgowania niezbędne do rozwiązywania równań wykładniczych.

Własności potęgowania

Poniższe założenia potęgowania są podane w aspekcie przekształcania funkcji wykładniczej (dla funkcji potęgowej mamy więcej przypadków):

- rozważamy potęgę a^b
- musimy założyć, że $a > 0$ i wtedy działanie a^b jest wykonalne dla dowolnego wykładnika b ,
- $a^0 = 1$, $1^b = 1$ dla dowolnego wykładnika $b \in \mathbb{R}$.

Własności potęgowania.

1. Mnożenie potęg o tej samej podstawie:

$$\forall b, c \in \mathbb{R} \quad a^b \cdot a^c = a^{b+c}, \quad a > 0.$$

2. Dzielenie potęg o tej samej podstawie:

$$\forall b, c \in \mathbb{R} \quad \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}, \quad a > 0.$$

3. Potęga potęgi:

$$\forall b, c \in \mathbb{R} \quad (a^b)^c = a^{b \cdot c} = (a^c)^b, \quad a > 0.$$

4. Potęgowanie iloczynu:

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad (a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c, \quad a > 0, b > 0.$$



5. Potęgowanie ilorazu (wersja własności iloczynu potęg)

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}, \quad a > 0, b > 0.$$

6. Potęga ze znakiem minus (nie oznacza to, że wykładnik jest ujemny):

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b}, \quad a > 0.$$

Funkcja wykładnicza

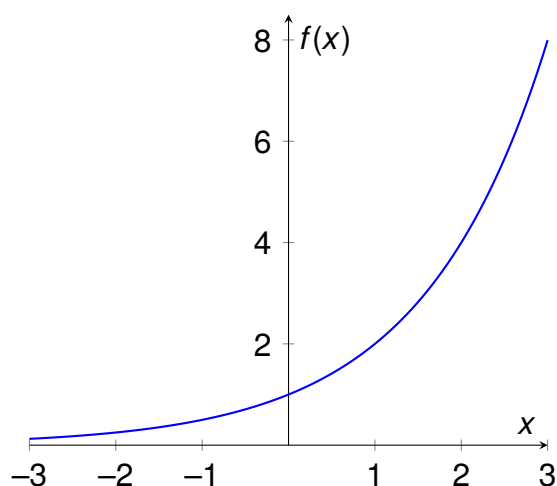
Funkcja wykładnicza jest określona w następujący sposób:

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}.$$

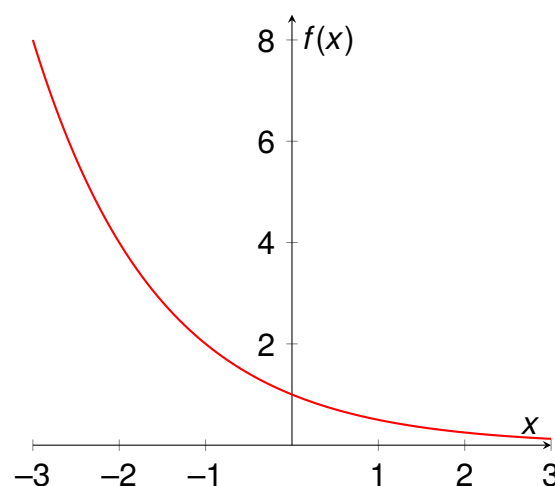
Własności funkcji wykładniczej wykorzystywane do rozwiązywania zadań.

- a) Dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbb{R}$.
- b) Zbiorem wartości jest $(0, \infty)$.
- c) Monotoniczność:
 - funkcja $f(x) = a^x$ jest rosnąca dla $a > 1$;
 - funkcja $f(x) = a^x$ jest malejąca dla $0 < a < 1$.
- d) Punkt szczególny dla $x = 0$, $f(0) = 1$.
- e) Funkcja jest ciągła w całej dziedzinie.

Wykresy funkcji wykładniczej



Wykres $f(x) = 2^x$ (funkcja rosnąca,
 $a > 1$).



Wykres $f(x) = 0.5^x$ (funkcja malejąca,
 $0 < a < 1$).

Zastosowanie iniekcji do rozwiązywania równań

Funkcja f jest różnowartościowa (iniekcją), jeśli dla każdego $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Jeśli f jest iniekcją, to zbiór rozwiązań równania

$$f(g(x)) = f(h(x))$$

jest równoważny zbiorowi rozwiązań równania

$$g(x) = h(x).$$



Wniosek 1. Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0, a \neq 1$, jest różnowartościowa na całej swojej dziedzinie, zatem

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x).$$

Sformułowana powyżej uwaga jest kluczowa w rozwiązywaniu równań, w których występuje funkcja wykładnicza.

Przykład 9. Rozwiązać równanie

$$2^{3x-1} = 2^{x+5}.$$

1. Funkcja $f(x) = 2^x$ jest różnowartościowa, zatem zbiór rozwiązań powyższego równania jest równy zbiorowi rozwiązań równania:

$$3x - 1 = x + 5.$$

2. Możemy to zapisać krótko

$$2^{3x-1} = 2^{x+5} \iff 3x - x = 5 + 1 \iff 2x = 6 \iff x = 3.$$

3. Rozwiązaniem równania jest $x = 3$.

Przykład 10. Rozwiązać równania :

a) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3},$

b) $21 \cdot 3^x - 25 \cdot 5^x = 81 \cdot 3^x - 125 \cdot 5^x,$

c) $6^{x+1} + 6^{1-x} = 37,$

d) $16^x + 4^{x+2} - 36 = 0,$

e) $16^{\frac{x}{x+3}} = 4 \left(\frac{2^x}{8}\right)^{\frac{1}{2x+5}},$



f) $2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

Rozwiązanie:

Ad. a) Rozwiązujemy równanie

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3},$$

jego dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

1. Korzystamy z własności (4) aby otrzymać potęgę o tym samym wykładniku x

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-1} = \frac{2}{3}.$$

2. Ponownie korzystając z własności (4)

$$\left(\frac{4}{9} \cdot \frac{27}{8}\right)^x \cdot \frac{8}{27} = \frac{2}{3}.$$

3. Po wymnożeniu podstaw równanie przyjmuje postać

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \frac{8}{27} = \frac{2}{3}.$$

4. Wyznaczamy funkcję potęgową

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{8} = \frac{54}{24} = \frac{9}{4}.$$

5. Liczbę z prawej strony równania przekształcamy do postaci potęgowej z podstawą równą funkcji a następnie korzystając z Wniosku 1 otrzymujemy równoważne równanie

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ostatecznie, rozwiązanie to $x = 2$.

Ad. b) Rozwiązujemy równanie:

$$21 \cdot 3^x - 25 \cdot 5^x = 81 \cdot 3^x - 125 \cdot 5^x.$$

1. Redukujemy wyrazy podobne i otrzymujemy

$$-60 \cdot 3^x = -100 \cdot 5^x.$$

2. Dzielimy obie strony przez (-20)

$$3 \cdot 3^x = 5 \cdot 5^x.$$

4. Dzielimy obie strony przez $3 \cdot 5^x$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}.$$

5. Podstawy obu potęg są teraz takie same, korzystając z Wniosku 1 i porównując wykładniki otrzymujemy rozwiązanie równania: $x = -1$.

Ad. c) Rozwiązujemy równanie:

$$6^{x+1} + 6^{1-x} = 37.$$

1. Korzystając z własności (4) i (6) mamy $6^{x+1} = 6 \cdot 6^x$ oraz $6^{1-x} = 6 \cdot 6^{-x} = \frac{6}{6^x}$, możemy teraz przedstawić równanie w postaci:

$$6 \cdot 6^x + \frac{6}{6^x} = 37.$$



2. Wprowadzamy podstawienie $y = 6^x$, gdzie $y > 0$:

$$6y + \frac{6}{y} = 37.$$

3. Mnożymy obie strony przez y , aby pozbyć się ułamka i otrzymujemy:

$$6y^2 + 6 = 37y.$$

4. Przekształcamy wyrażenie do postaci równania kwadratowego

$$6y^2 - 37y + 6 = 0.$$

5. Obliczamy wyróżnik

$$\Delta = (-37)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6 = 1369 - 144 = 1225 > 0,$$

czyli istnieją dwa różne rozwiązania.

6. Wyznaczamy rozwiązania:

$$y = \frac{37 + 35}{12} = 6 \quad \vee \quad y = \frac{37 - 35}{12} = \frac{1}{6}.$$

7. Wracamy do podstawienia $y = 6^x$:

$$6^x = 6 \quad \vee \quad 6^x = \frac{1}{6} = 6^{-1}.$$

8. Ponownie korzystamy z Wniosku 1, porównując wykładniki otrzymujemy ostateczne rozwiązanie $x = 1 \quad \vee \quad x = -1 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$.





Ad. d) Rozwiązujemy równanie:

$$16^x + 4^{x+2} - 36 = 0.$$

1. Z własności (3) i (4) mamy $16^x = (4^x)^2 = (4^x)^2$ oraz $4^{x+2} = 4^x \cdot 4^2$, co pozwala napisać równanie w postaci

$$(4^x)^2 + 16 \cdot 4^x - 36 = 0.$$

2. Wprowadzamy podstawienie $y = 4^x$, gdzie $y > 0$, otrzymując równanie kwadratowe

$$y^2 + 16y - 36 = 0.$$

3. Obliczamy wyróżnik równania:

$$\Delta = 16^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 256 + 144 = 400 > 0 \Rightarrow \text{równanie posiada 2 rozwiązania.}$$

4. Wyznaczamy rozwiązania:

$$y = \frac{-16 + 20}{2} = 2 \quad \vee \quad y = \frac{-16 - 20}{2} = -18.$$

5. Wracamy do podstawienia $y = 4^x$, $y > 0$:

$$y = 4^x \quad \wedge \quad (y = 2 \vee y = -18) \Leftrightarrow 4^x = 2.$$

Rozwiązanie $y = -18$ nie spełnia założenia $y > 0$ więc nie bierzemy go pod uwagę.

6. Zatem, rozwiązujemy tylko równanie

$$4^x = 2 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$



Ostatecznie rozwiązanie to $x = \frac{1}{2}$.

Ad. e) Rozwiązujemy równanie:

$$16^{\frac{x}{x+3}} = 4 \left(\frac{2^x}{8} \right)^{\frac{1}{2x+5}}.$$

To zadanie ma trochę wyższy stopień trudności. W poprzednich przykładach dziedzinę, z oczywistych powodów, stanowił zbiór $\mathbb{R}$, w tym zadaniu musimy zacząć od wyznaczenia dziedziny.

1. Dziedzina równania:

$$\left[x + 3 \neq 0 \quad \wedge \quad 2x + 5 \neq 0 \right] \iff \left[x \neq -3 \quad \wedge \quad x \neq -\frac{5}{2} \right] \iff \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -3, -\frac{5}{2} \right\}.$$

2. Korzystając z definicji potęg mamy $16 = 2^4$, $8 = 2^3$, podstawiając do równania i korzystając z Własności 5 otrzymujemy

$$\left(2^4 \right)^{\frac{x}{x+3}} = 4 \left(\frac{2^x}{2^3} \right)^{\frac{1}{2x+5}} = 4 \left(2^{x-3} \right)^{\frac{1}{2x+5}}.$$

3. Korzystając z Własności 3 przekształcamy lewą stronę równania

$$\left(2^4 \right)^{\frac{x}{x+3}} = 2^{4 \cdot \frac{x}{x+3}} = 2^{\frac{4x}{x+3}}.$$

4. Korzystając kolejno z Własności 3 i 4 przekształcamy prawą stronę równania

$$4 \left(2^{x-3} \right)^{\frac{1}{2x+5}} = 2^2 \cdot \left(2^{x-3} \right)^{\frac{1}{2x+5}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{x-3}{2x+5}} = 2^{2+\frac{x-3}{2x+5}}.$$

5. Teraz równanie przyjmuje postać:

$$2^{\frac{4x}{x+3}} = 2^{2+\frac{x-3}{2x+5}}.$$



6. Korzystamy z Wniosku 1 (ponieważ podstawy są równe) i otrzymujemy:

$$\frac{4x}{x+3} = 2 + \frac{x-3}{2x+5}.$$

7. Sprowadzamy prawą stronę do jednego ułamka:

$$\frac{4x}{x+3} = 2 \cdot \frac{2x+5}{2x+5} + \frac{x-3}{2x+5} = \frac{4x+10+x-3}{2x+5} = \frac{5x+7}{2x+5}.$$

8. Teraz obie strony równania mnożymy przez wspólny mianownik, którym jest iloczyn mianowników (czasami dla uproszczenia mówi się, że wykonujemy mnożenie na "krzyż", bo rzeczywiście sprowadzenie takich ułamków do wspólnego mianownika tak można przeprowadzić ale trzeba pamiętać, że w tej operacji skorzystaliśmy jeszcze z twierdzenia o równości funkcji wymiernych, które mają te same mianowniki!)

$$(4x)(2x+5) = (5x+7)(x+3).$$

9. Wykonujemy działania i dokonujemy redukcji wyrazów podobnych, otrzymując równoważne równanie

$$3x^2 - 2x - 21 = 0.$$

10. Obliczamy wyróżnik

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-21) = 4 + 252 = 256 > 0, \text{ istnieją więc 2 rozwiązania.}$$

11. Wyznaczamy rozwiązania:

$$x = \frac{2+16}{6} = 3 \quad \vee \quad x = \frac{2-16}{6} = -\frac{7}{3}.$$





12. Sprawdzamy czy pierwiastki należą do dziedziny, czyli czy

$$(x = -\frac{7}{3}, x = 3) \text{ należą do } \mathbb{R} \setminus \left\{ -3, -\frac{5}{2} \right\} ?$$

13. Odpowiedź jest twierdząca, wobec tego ostatecznie rozwiązanie to:

$$x = -\frac{7}{3} \vee x = 3.$$

Ad. f) Rozwiązujemy równanie:

$$2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

1. Wprowadzamy podstawienie $y = 2^x$, gdzie $y > 0$, co daje:

$$y^3 - 3y^2 - 6y + 8 = 0.$$

2. Poszukujemy pierwiastków. Z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych badamy dzielniki wyrazu wolnego (8) i dzielniki współczynnika przy y^3 (1):

$$\text{Dzielniki: } \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8.$$

Sprawdzamy, które z nich są pierwiastkami wielomianu:

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 1 - 3 - 6 + 8 = 0 \implies y = 1 \text{ jest pierwiastkiem.}$$

3. Dzielimy wielomian $(y^3 - 3y^2 - 6y + 8)$ przez dwumian $(y - 1)$. Wynik dzielenia otrzymujemy za pomocą schematu Hornera:

$$\left[y^3 - 3y^2 - 6y + 8 \right] : (y - 1) = (y^2 - 2y - 8),$$



co jest równoważne postaci iloczynowej

$$y^3 - 3y^2 - 6y + 8 = (y - 1)(y^2 - 2y - 8).$$

4. Obliczamy pierwiastki równania kwadratowego $y^2 - 2y - 8 = 0$:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36 > 0 \implies \text{istnieją 2 różne pierwiastki,}$$

$$y = \frac{2 + 6}{2} = 4 \quad \vee \quad y = \frac{2 - 6}{2} = -2 \quad (\text{mamy jeszcze pierwiastek } y = 1).$$

Z założenia $y = 2^x > 0$, więc eliminujemy pierwiastek $y = -2$.

5. Powracamy do zmiennej x , $y = 2^x$ a następnie korzystamy z Wniosku 1 i otrzymujemy

$$\left(2^x = 1 \vee 2^x = 4 \right) \iff \left(x = 0 \vee x = 2 \right).$$

7. Ostatecznie, rozwiązaniem równania jest $x = 0 \vee x = 2$.

Nierówności wykładnicze – rozwiązania przykładowych zadań

Przed przystąpieniem do rozwiązywania przykładów przypomnimy niezbędne pojęcia i własności funkcji potęgowej.

— Funkcja f jest rosnąca na zbiorze $D \subseteq \mathbb{R}$, jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in D$, takich że $x_1 < x_2$, zachodzi:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

— Funkcja f jest malejąca na zbiorze $D \subseteq \mathbb{R}$, jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in D$, takich że $x_1 < x_2$, zachodzi:

$$f(x_1) > f(x_2).$$



Wniosek 2.

Jeśli f jest funkcją rosnącą, to dla dowolnych $x_1, x_2 \in D$ zachodzi:

$$f(x_1) < f(x_2) \iff x_1 < x_2.$$

Jeśli f jest funkcją malejącą, to dla dowolnych $x_1, x_2 \in D$ zachodzi:

$$f(x_1) < f(x_2) \iff x_1 > x_2.$$

Wniosek dla funkcji złożonych

Niech f będzie funkcją monotoniczną, $g(x)$ i $h(x)$ funkcjami określonymi na zbiorze D .

Wówczas:

Wniosek 3. Jeśli f jest funkcją rosnącą, to:

$$f(g(x)) < f(h(x)) \iff g(x) < h(x).$$

Wniosek 4. Jeśli f jest funkcją malejącą, to:

$$f(g(x)) < f(h(x)) \iff g(x) > h(x).$$

Te zależności wynikają z zachowania funkcji monotonicznych w odniesieniu do porządku argumentów.

Uwaga: Identyczne nierówności zachodzą dla słabych nierówności " $\leq$ " i " $\geq$ ".

Pokażemy teraz zastosowanie własności funkcji monotonicznych do rozwiązywania nierówności, w których występuje funkcja wykładnicza.





Przypomnijmy funkcja wykładnicza $y = a^x$ jest:

- rosnąca, jeśli $a > 1$,
- malejąca, jeśli $0 < a < 1$.

Korzystając z Wniosków 3 i 4 sformułujemy fundamentalne równoważności wykorzystywane przy prawie wszystkich nierównościach wykładniczych. Dla dowolnych $f(x)$ i $g(x)$ określonych na wspólnej dziedzinie otrzymujemy.

Wniosek 5. *Jeśli $a > 1$ to:*

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) < g(x).$$

Wniosek 6. *Jeśli $0 < a < 1$ to:*

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) > g(x).$$

Przykład 11. Zastosowanie wniosku

Rozwiążmy nierówność:

$$3^{2x-1} > 3^{x+4}.$$

1. Funkcja wykładnicza 3^x jest ściśle rosnąca ($a = 3 > 1$). W związku z tym :

$$3^{2x-1} > 3^{x+4} \iff 2x - 1 > x + 4.$$

2. Rozwiązanie nierówności liniowej

$$2x - x > 4 + 1 \iff x > 5.$$

3. Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $(5; \infty)$.





Uwaga. Dzięki monotoniczności funkcji wykładniczej możemy przekształcać nierówności wykładnicze, na znacznie prostsze, nierówności dla wykładników potęg, co znacząco ułatwia proces poszukiwania jej zbioru rozwiązań.

Przykład 12. Rozwiązać nierówności:

a) $4^{x+7} < 8^{2x-10}$,

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{6}{x}} \leq 4^{\frac{1}{3}}$,

c) $2^{x+5} + 2^{x+4} + 5 \cdot 2^{x+2} < 34$,

d) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 27 > 0$,

e) $\frac{1}{3^x - 1} > \frac{3}{9 - 3^x}$.

Ad. a) Rozwiązujemy nierówność:

$$4^{x+7} < 8^{2x-10}.$$

1. Wyrażamy obie podstawy w postaci potęgi liczby 2: $4 = 2^2$ oraz $8 = 2^3$. Podstawiamy te wartości do nierówności:

$$(2^2)^{x+7} < (2^3)^{2x-10}.$$

2. Korzystając z własności 3 otrzymujemy:

$$2^{2(x+7)} < 2^{3(2x-10)}.$$

3. Po wykonaniu działań mamy

$$2^{2x+14} < 2^{6x-30}.$$





4. Funkcja 2^x jest rosnąca ($a = 2 > 1$), więc na mocy Wniosku 5:

$$2^{2x+14} < 2^{6x-30} \iff 2x + 14 < 6x - 30.$$

5. Rozwiązujemy nierówność liniową:

$$2x - 6x < -30 - 14 \iff -4x < -44 \iff x > 11.$$

6. Zbiór rozwiązań nierówności to $(11; \infty)$.

Ad. b) Rozwiązujemy nierówność:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{6}{x}} \leq 4^{\frac{1}{3}}.$$

1. Wyznaczamy dziedzinę nierówności. Wykładnik $\frac{6}{x}$ jest określony, gdy $x \neq 0$. Zatem:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

2. Z własności 6 wynika $\frac{1}{4} = 4^{-1}$, co daje nierówność:

$$\left(4^{-1}\right)^{\frac{6}{x}} \leq 4^{\frac{1}{3}}.$$

3. Następnie z Własności 3 otrzymujemy

$$4^{-\frac{6}{x}} \leq 4^{\frac{1}{3}}.$$

4. Funkcja wykładnicza 4^x jest rosnąca ($a = 4 > 1$). W związku z tym wobec Wniosku 5 otrzymujemy

$$4^{-\frac{6}{x}} \leq 4^{\frac{1}{3}} \iff -\frac{6}{x} \leq \frac{1}{3}.$$



5. Mnożymy obie strony przez x^2 (co nie zmienia zwrotu nierówności, bo $x^2 > 0$, w dziedzinie) i dalej przekształcamy:

$$-6x \leq \frac{x^2}{3} \Leftrightarrow -18x \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 + 18x \geq 0.$$

6. Rozwiązujemy nierówność kwadratową, tutaj wystarczy wyłączyć x przed nawias i przeanalizować znak funkcji w przedziałach:

$$x(x + 18) \geq 0 \Leftrightarrow \left[x \in (-\infty, -18] \cup [0, \infty) \wedge x \neq 0 \right] \Leftrightarrow \left[x \in (-\infty, -18] \cup (0, \infty) \right].$$

7. Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $(-\infty, -18] \cup (0, \infty)$.

Ad. c) Rozwiązujemy nierówność:

$$2^{x+5} + 2^{x+4} + 5 \cdot 2^{x+2} < 34.$$

1. Wyłączamy przed nawias wspólny czynnik 2^{x+2} :

$$2^{x+5} + 2^{x+4} + 5 \cdot 2^{x+2} = 2^{x+2} (2^3 + 2^2 + 5).$$

2. Obliczamy wartość w nawiasie

$$2^3 + 2^2 + 5 = 8 + 4 + 5 = 17.$$

Zatem nierówność przyjmuje postać:

$$2^{x+2} \cdot 17 < 34.$$



3. Dzieląc obie strony przez 17 otrzymujemy:

$$2^{x+2} < 2 \iff 2^{x+2} < 2^1.$$

4. Funkcja wykładnicza 2^x jest rosnąca ($a = 2 > 1$), więc korzystając z Wniosku 5 poprzednia nierówność jest równoważna nierówności dla wykładników:

$$x + 2 < 1 \iff x < -1.$$

5. Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $(-\infty; -1)$.

Ad. d) Rozwiązujemy nierówność:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x - 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 27 > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Zauważmy, że z Własności 3 otrzymujemy $\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$, oraz

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^x = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)^2.$$

2. Nierówność przyjmuje postać:

$$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)^2 - 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 27 > 0.$$

3. Wprowadzamy pomocniczą zmienną $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, gdzie $y > 0$, teraz nierówność przyjmuje postać:

$$y^2 - 12y + 27 > 0.$$

4. Rozwiązujemy równanie kwadratowe $y^2 - 12y + 27 = 0$:

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27 = 144 - 108 = 36 > 0 \implies \text{że istnieją dwa pierwiastki}$$

$$y = \frac{12 + 6}{2} = 9 \quad \vee \quad y = \frac{12 - 6}{2} = 3.$$

5. Zatem wyrażenie $y^2 - 12y + 27$ jest dodatnie poza przedziałem $[3, 9]$, czyli:

$$\left[y \in (-\infty, 3) \cup (9, \infty) \wedge y > 0 \right] \iff y \in (0, 3) \cup (9, \infty).$$

6. Wracamy do zmiennej x , poprzednia nierówność oznacza, że:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \in (0, 3) \cup (9, \infty) \iff 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 3 \vee \left(\frac{1}{3}\right)^x > 9.$$

7. Zauważmy najpierw, że nierówność $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^x$ jest spełniona dla każdego $x \in \mathbb{R}$ (z własności funkcji wykładniczej - zbiór wartości), ponadto korzystając z Własności 6 widzimy, że poprzednia nierówność jest równoważna następującym:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3 \vee \left(\frac{1}{3}\right)^x > 9 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \vee \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}.$$

8. Funkcja $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ jest ściśle malejąca ($0 < \frac{1}{3} < 1$), zatem z Własności 6:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \vee \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \iff x > -1 \vee x < -2.$$

9. Ostatecznie otrzymujemy zbiór rozwiązań: $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$.



Ad. e) Rozwiązujemy nierówność:

$$\frac{1}{3^x - 1} > \frac{3}{9 - 3^x}.$$

1. Zaczynamy od wyznaczenia dziedziny nierówności, aby wyrażenia miały sens, mianowniki muszą być różne od zera:

$$3^x - 1 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad 9 - 3^x \neq 0.$$

Z pierwszego warunku otrzymujemy:

$$3^x \neq 1 \iff 3^x \neq 3^0 \iff x \neq 0.$$

Z drugiego warunku:

$$9 - 3^x \neq 0 \iff 3^x \neq 3^2 \iff x \neq 2.$$

Zatem dziedzina to zbiór: $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

2. Wprowadzamy zmienną $y = 3^x$, gdzie $y > 0$. Nierówność przyjmuje wtedy postać:

$$\frac{1}{y - 1} > \frac{3}{9 - y}.$$

3. Sprowadzamy nierówność do wspólnego mianownika, którym jest $(y - 1)(9 - y)$.

Przekształcamy nierówność:

$$\frac{1}{y - 1} - \frac{3}{9 - y} > 0 \iff \frac{(9 - y) - 3(y - 1)}{(y - 1)(9 - y)} > 0.$$



4. Wykonujemy działania w liczniku

$$(9 - y) - 3(y - 1) = 9 - y - 3y + 3 = 12 - 4y.$$

i ostatecznie nierówność przyjmuje postać:

$$\frac{12 - 4y}{(y - 1)(9 - y)} > 0.$$

5. Rozwiązywanie będzie bardziej intuicyjne, gdy skorzystamy z twierdzenia o nierównościach wymiernych, wtedy:

$$\frac{12 - 4y}{(y - 1)(9 - y)} > 0 \iff (12 - 4y)(y - 1)(9 - y) > 0 \wedge y \neq 1 \wedge y \neq 9.$$

6. Przeprowadzamy analizę znaków w przedziałach (przypominamy $y > 0$):

$$(0, 1), (1, 3), (3, 9), (9, \infty).$$

7. Po analizie znaków w każdym przedziale otrzymujemy:

$$(12 - 4y)(y - 1)(9 - y) > 0 \wedge y \neq 1 \wedge y \neq 9 \iff y \in (1, 3) \cup (9, \infty).$$

8. Powrót do zmiennej x , z podstawienia $y = 3^x$, daje:

$$3^x \in (1, 3) \cup (9, \infty) \iff (1 < 3^x \wedge 3^x < 3) \vee 3^x > 9 \iff (3^0 < 3^x \wedge 3^x < 3^1) \vee 3^x > 3^2.$$





9. Podstawa funkcji wykładniczej jest większa od jednego więc funkcja wykładnicza jest rosnąca, zatem z Własności 5

$$\left(3^0 < 3^x \wedge 3^x < 3^1\right) \vee 3^x > 3^2 \iff (0 < x \wedge x < 1) \vee x > 2.$$

10. Ostatecznie rozwiązaniem nierówności jest zbiór $(0, 1) \cup (2, \infty)$.

Logarytmy i ich własności – rozwiązania przykładowych zadań

Przykład 13. Obliczyć:

a) $\log_{\frac{2}{5}} \frac{16}{625}$;

b) $\log_3 \frac{1}{726}$;

c) $\log_{\sqrt{7}} 7^{\sqrt[3]{7}}$.

Rozwiązanie:

Przypomnijmy definicję logarytmu:

Jeżeli $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $b > 0$ to $\log_a b = c \iff a^c = b$.

Bezpośrednio z definicji wynikają następujące własności:

Jeżeli $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $b \in \mathbb{R}_+$ i $r \in \mathbb{R}$, to

(I) $\log_a a = 1$,

(II) $\log_a 1 = 0$,

(III) $\log_a a^r = r$,

(IV) $a^{\log_a b} = b$.

Ad a) Oznaczmy szukany logarytm jako c , wtedy korzystając z definicji logarytmu otrzymujemy

$$\log_{\frac{2}{5}} \frac{16}{625} = c \iff \left(\frac{2}{5}\right)^c = \frac{16}{625}.$$

Rozwiązując powyższe równanie wykładnicze dostajemy

$$\left(\frac{2}{5}\right)^c = \frac{16}{625} \iff \left(\frac{2}{5}\right)^c = \frac{2^4}{5^4} \stackrel{(*)}{\iff} \left(\frac{2}{5}\right)^c = \left(\frac{2}{5}\right)^4 \stackrel{(**)}{\iff} c = 4.$$

(*) Podczas rozwiązywania równania wykorzystujemy własność potęg: $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$.

(**) Wykorzystujemy fakt, że funkcja wykładnicza jest różnowartościowa w swojej dziedzinie.

Ad b) Analogicznie jak w przykładzie poprzednim, korzystając z definicji logarytmu mamy

$$\log_3 \frac{1}{726} = c \iff (3)^c = \frac{1}{726}.$$

Rozwiązując powyższe równanie wykładnicze dostajemy

$$3^c = \frac{1}{726} \iff 3^c = \frac{1}{3^7} \xrightarrow{(*)} 3^c = (3)^{-7} \xrightarrow{(**)} c = -7.$$

Zatem $\log_3 \frac{1}{726} = -7$.

(*) Wykorzystujemy następującą własność potęg: $(a)^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

(**) Wykorzystujemy ponownie fakt, że funkcja wykładnicza jest różnowartościowa w swojej dziedzinie.

Ad c) Zgodnie z określeniem logarytmu mamy

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{7}} 7^{\sqrt[3]{7}} = c &\iff (\sqrt{7})^c = 7^{\sqrt[3]{7}} \iff \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^c = 7^1 \cdot 7^{\frac{1}{3}} \\ &\xrightarrow{(*),(**)} 7^{\frac{c}{2}} = 7^{1+\frac{1}{3}} \iff 7^{\frac{c}{2}} = 7^{\frac{4}{3}} \iff \frac{c}{2} = \frac{4}{3} \xrightarrow{(***)} c = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Zatem $\log_{\sqrt{7}} 7^{\sqrt[3]{7}} = \frac{8}{3}$.

(*) Wykorzystujemy własność potęg: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(**) Wykorzystujemy własność potęg: $(a^x)^y = a^{xy}$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(***) Korzystamy z faktu, że funkcja wykładnicza jest różnowartościowa w swojej dziedzinie.

Przykład 14. Obliczyć wartość wyrażenia

$$\text{a) } \log_7 3 \cdot \log_3 7 + \frac{\log_6 49}{\log_6 7}, \quad \text{b) } 9^{\log_3 \sqrt{3} + \frac{1}{2}} - \frac{\log_2 16}{\log_2 4}; \quad \text{c) } \log_3 30 - \left(5 + \frac{1}{\log 3}\right).$$

Rozwiązanie:

Przypomnijmy następujące własności logarytmów.

Niech $a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $c, x, y \in \mathbb{R}_+$, i $r \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$(i) \log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y),$$

$$(ii) \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y},$$

$$(iii) \log_a x^r = r \cdot \log_a x,$$

$$(iv) \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}.$$

Ad a) Zauważmy, że stosując własności logarytmów otrzymujemy

$$\log_7 3 \cdot \log_3 7 + \frac{\log_6 49}{\log_6 7} \stackrel{(iv)}{=} \log_7 3 \cdot \frac{1}{\log_7 3} + \log_7 49 \stackrel{(i),(iii)}{=} 1 + 2 = 3.$$

Ad b) Korzystając z własności logarytmów mamy

$$\begin{aligned} 9^{\log_3 \sqrt{3} + \frac{1}{2}} - \frac{\log_2 16}{\log_2 4} &\stackrel{(iv)}{=} (3^2)^{\log_3 \sqrt{3} + \frac{1}{2}} - \log_4 16 \stackrel{(*),(iii)}{=} 3^{2 \cdot (\log_3 \sqrt{3} + \frac{1}{2})} - 2 \\ &\stackrel{(iii)}{=} 3^{\log_3 (\sqrt{3})^2} \cdot 3^1 - 2 \stackrel{(**)}{=} 3^{\log_3 3} \cdot 3 - 2 \stackrel{(IV)}{=} 3 \cdot 3 - 2 = 7. \end{aligned}$$

(*) Wykorzystujemy własność potęg: $(a^x)^y = a^{xy}$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(**) Wykorzystujemy własność potęg: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ad c) Mamy

$$\begin{aligned} \log_3 30 - \left(5 + \frac{1}{\log 3}\right) &\stackrel{(iv)}{=} \frac{\log 30}{\log 3} - \frac{5 \log 3 + 1}{\log 3} = \frac{\log(3 \cdot 10) - 5 \log 3 - 1}{\log 3} \\ &\stackrel{(i)}{=} \frac{\log 3 + \log 10 - 5 \log 3 - 1}{\log 3} = \frac{1 - 4 \log 3 - 1}{\log 3} = \frac{-4 \log 3}{\log 3} = -4. \end{aligned}$$

Przykład 15. Wykazać, że wartość wyrażenia $\log_{21}^2 3 + \log_{21}^2 7 + \log_{21} 49 \cdot \log_{21} 3$ jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że stosując własności logarytmów oraz wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy otrzymujemy

$$\begin{aligned}\log_{21}^2 3 + \log_{21}^2 7 + \log_{21} 49 \cdot \log_{21} 3 &= \log_{21}^2 3 + \log_{21}^2 7 + \log_{21} 7^2 \cdot \log_{21} 3 \\ &\stackrel{(iii)}{=} \log_{21}^2 3 + \log_{21}^2 7 + 2 \log_{21} 7 \cdot \log_{21} 3 \\ &= (\log_{21} 7 + \log_{21} 3)^2 \stackrel{(ii)}{=} (\log_{21} (7 \cdot 3))^2 \\ &= (\log_{21} 21)^2 = 1^2 = 1\end{aligned}$$

Liczba $1 \in \mathbb{N}$. Co kończy dowód.

Przykład 16. Wiedząc, że $\log_{14} 2 = a$, zaś $\log_{14} 5 = b$ obliczyć $\log_7 50$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\log_7 50 &\stackrel{(iv)}{=} \frac{\log_{14} 50}{\log_{14} 7} = \frac{\log_{14} (2 \cdot 25)}{\log_{14} \frac{14}{2}} \\ &\stackrel{(i)(ii)}{=} \frac{\log_{14} 2 + \log_{14} 25}{\log_{14} 14 - \log_{14} 2} \stackrel{(iii)}{=} \frac{\log_{14} 2 + 2\log_{14} 5}{1 - \log_{14} 2} = \frac{a + 2b}{1 - a}.\end{aligned}$$

Funkcje logarytmiczne – rozwiązania przykładowych zadań

Przykład 17. Wyznaczyć dziedzinę naturalną funkcji

a) $f(x) = \log_3 \frac{x}{7-x};$

b) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} |x-5|};$

c) $f(x) = \log_{x+5}(x^2 - 25) + \sqrt{16 - 2x}.$

Rozwiązanie:

Funkcja logarytmiczna jest określona na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, ponadto podstawa logarytmu jest liczbą dodatnią i różną od jedności.

Ad a) Mamy

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{7-x} > 0 \wedge 7-x \neq 0 \right\}.$$

Zauważmy, że

$$\frac{x}{7-x} > 0 \wedge 7-x \neq 0 \Leftrightarrow x(7-x) > 0 \wedge x \neq 7 \Leftrightarrow x \in (0, 7) \wedge x \neq 7 \Leftrightarrow x \in (0, 7).$$

Zatem dziedzina badanej funkcji jest postaci $D_f = (0, 7)$.

Ad b)

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{1}{3}} |x-5| \geq 0 \wedge |x-5| > 0 \right\}.$$

Zauważmy, że

$$\log_{\frac{1}{3}} |x-5| \geq 0 \wedge |x-5| > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} |x-5| \geq \log_{\frac{1}{3}} 1 \wedge x \neq 5$$

Funkcja logarytmiczna o podstawie należącej do przedziału $(0, 1)$ jest funkcją malejącą, więc zmienia się zwrot nierówności.

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{3}} |x-5| \geq \log_{\frac{1}{3}} 1 \wedge x \neq 5 &\iff |x-5| \leq 1 \wedge x \neq 5 \\ &\iff -1 \leq x-5 \leq 1 \wedge x \neq 5 \\ &\iff 4 \leq x \leq 6 \wedge x \neq 5 \\ &\iff x \in \langle 4, 5 \rangle \cup (5, 6).\end{aligned}$$

Zatem dziedzina badanej funkcji jest postaci $D_f = \langle 4, 5 \rangle \cup (5, 6)$.

Ad c)

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 - 25 > 0 \wedge x + 5 > 0 \wedge x - 5 \neq 1 \wedge 16 - 2x \geq 0 \right\}.$$

Mamy

$$\begin{aligned}x^2 - 25 > 0 \wedge x - 5 > 0 \wedge x - 5 \neq 1 \wedge 16 - 2x \geq 0 \\ \iff x \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty) \wedge x > 5 \wedge x \neq 6 \wedge x \leq 8 \iff x \in (5, 6) \cup (6, 8).\end{aligned}$$

Dziedziną funkcji jest zbiór $D_f = (5, 6) \cup (6, 8)$.

Przykład 18. Wykazać parzystość funkcji $f(x) = x^3 \log_2 \frac{2-x}{2+x}$.

Rozwiązanie:

Przypomnijmy, że funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest parzysta w zbiorze $D, D \subset X$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\bigwedge_{x \in D} (-x \in D \wedge f(-x) = f(x)).$$

Zacznijmy od wyznaczenia dziedziny funkcji f

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2-x}{2+x} > 0 \wedge 2+x \neq 0 \right\} = \{x \in \mathbb{R} : (2-x)(2+x) > 0 \wedge x \neq -2\} = (-2, 2)$$

Zatem dla dowolnego $x \in (-2, 2)$, również $-x \in (-2, 2)$, czyli dziedzina jest zbiorem symetrycznym względem 0 na osi OX .

Ponadto dla dowolnego $x \in D$ mamy

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 \log_2 \frac{2 - (-x)}{2 + (-x)} = -x^3 \log_2 \frac{2 + x}{2 - x} = -x^3 \log_2 \left(\frac{2 - x}{2 + x} \right)^{-1} \\ &= -x^3 \left(-\log_2 \left(\frac{2 - x}{2 + x} \right) \right) = x^3 \log_2 \left(\frac{2 - x}{2 + x} \right) = f(x) \end{aligned}$$

Badana funkcja jest więc funkcją parzystą.

Przykład 19. Naszkicować wykres funkcji $f(x) = \left| \log_{\frac{1}{3}} \frac{3-x}{9-x^2} \right|$

Rozwiązanie:

W pierwszej kolejności wyznaczmy dziedzinę funkcji f

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{3-x}{9-x^2} > 0 \wedge 9-x^2 \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} : (3-x)(9-x^2) > 0 \wedge x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} : (3-x)^2(3+x) > 0 \wedge x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\} \right\} \\ &= (-3, +\infty) - \{3\} \end{aligned}$$

Zauważmy, że wzór funkcji można przekształcić do postaci:

$$\begin{aligned} \left| \log_{\frac{1}{3}} \frac{3-x}{9-x^2} \right| &= \left| \log_{\frac{1}{3}} \frac{\cancel{3-x}}{\cancel{(3-x)}(3+x)} \right| = \left| \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3+x} \right| \\ &= \left| \log_{\frac{1}{3}} (3+x)^{-1} \right| = \left| -\log_{\frac{1}{3}} (3+x) \right| = \left| \log_{\frac{1}{3}} (3+x) \right|. \end{aligned}$$

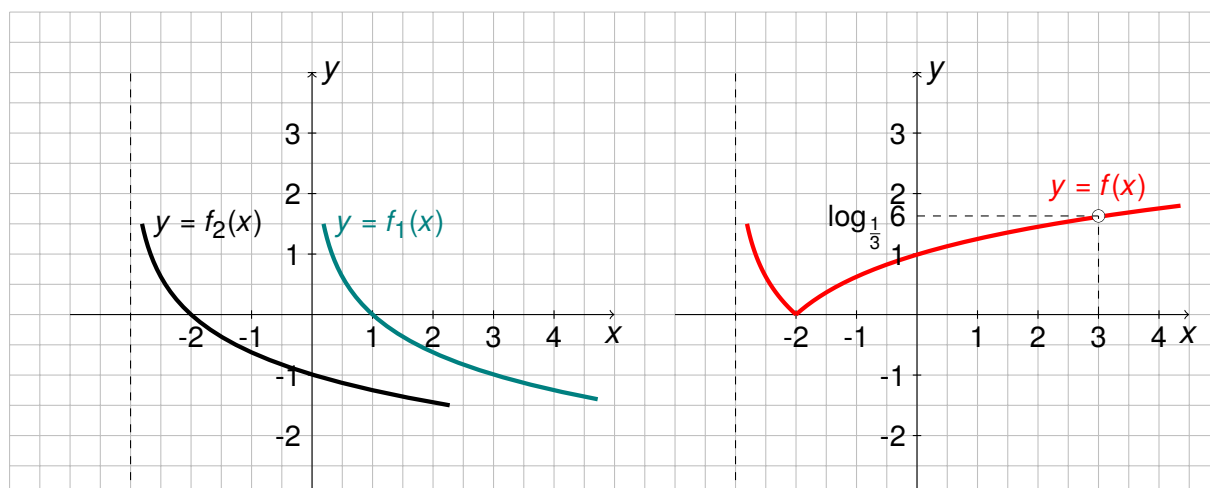
Zatem

$$f(x) = \left| \log_{\frac{1}{3}} (3+x) \right|, \quad x \in (-3, +\infty) - \{3\}.$$

Chcemy otrzymać wykres funkcji f poprzez przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej o podstawie $\frac{1}{3}$. Niech

- $f_1(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, wtedy
- $f_2(x) = f_1(x + 3)$. Wykres funkcji f_2 otrzymamy przez translację o wektor $\vec{v} = [-3, 0]$ wykresu funkcji f_1 .
- $f(x) = |f_2(x)|$. Wykres funkcji f otrzymamy przez częściową symetrię ($y < 0$) względem osi OX wykresu funkcji f_2 .

Ilustracja graficzna kolejnych przekształceń przedstawiona jest poniżej.



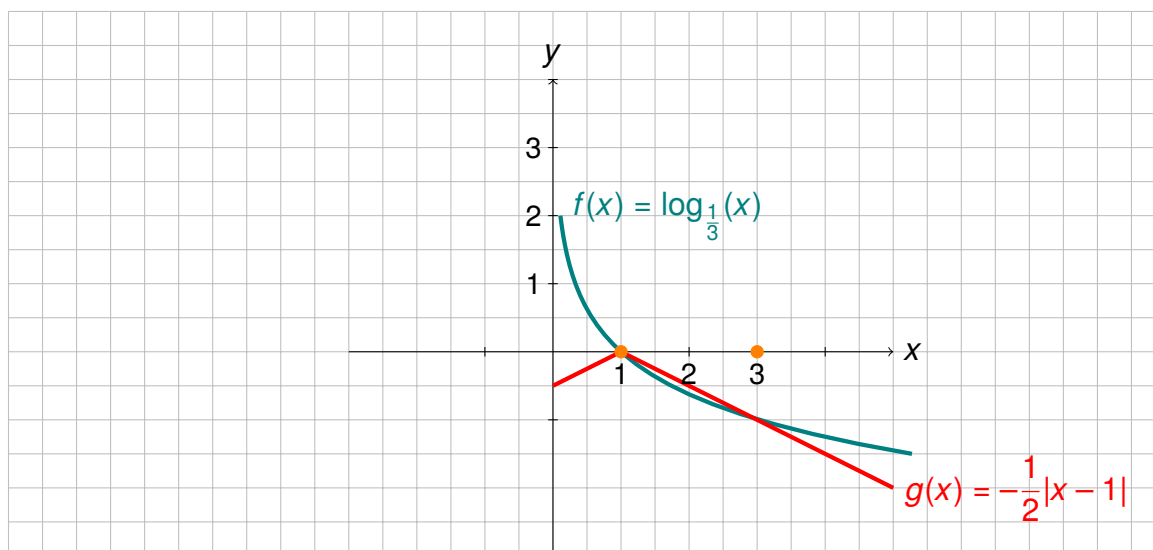
Przykład 20. Rozwiązać graficznie równanie : $\log_{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2}|x - 1|$.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia: $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ oraz $g(x) = -\frac{1}{2}|x - 1|$.

Dziedzinę równania jest zbiór $D_f = (0, \infty)$.

Rozwiązać równanie $f(x) = g(x)$, to znaczy wyznaczyć zbiór tych argumentów należących do przedziału $(0, +\infty)$ dla których funkcja f i g przyjmuje te same wartości. Szkicujemy we wspólnym układzie współrzędnych wykresy obu funkcji w przedziale $(0, +\infty)$.



Z ilustracji graficznej można odczytać, że wykresy funkcji przecinają się w punktach $(1, 0)$ i $(3, -1)$.

Sprawdźmy jeszcze poprawność odczytu: $f(1) = \log_{\frac{1}{3}}(1) = 0$ oraz $g(1) = 0$ oraz $f(3) = \log_{\frac{1}{3}}(3) = -1$ oraz $g(3) = -1$, czyli $f(1) = g(1)$ i $f(3) = g(3)$.

Zatem nasze równanie ma dwa rozwiązania: 1, 3.

Przykład 21. Rozwiązać graficznie nierówność : $\log_2(x-2) - 1 \geq 4x - x^2$.

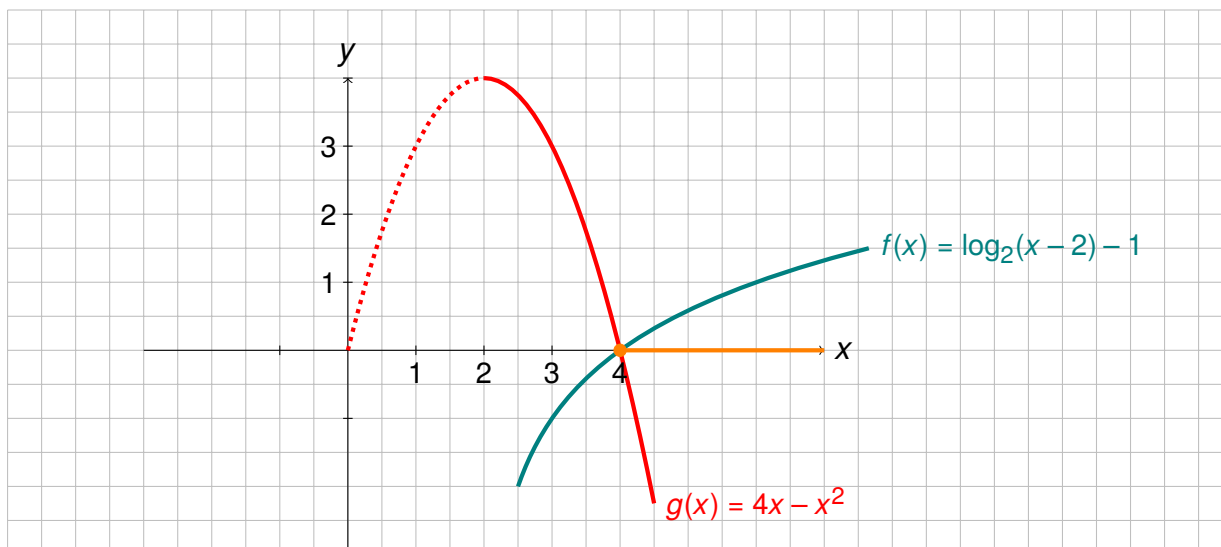
Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia: $f(x) = \log_2(x-2) - 1$ oraz $g(x) = 4x - x^2$.

Określmy dziedzinę równania:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 > 0\} = (2, \infty).$$

Szkicujemy na wspólnym układzie współrzędnych wykresy obu funkcji w przedziale $(2, +\infty)$.



Rozwiązać nierówność $f(x) \geq g(x)$, to znaczy wyznaczyć zbiór tych argumentów należących do przedziału $(2, +\infty)$ dla których funkcja f przyjmuje wartości nie mniejsze niż funkcja g , czyli wyznaczamy zbiór tych argumentów dla których wykres funkcji f leży nad wykresem funkcji g lub wykresy te mają punkt wspólny.

Wykresy funkcji przecinają się w punkcie $(4, 0)$.

Sprawdźmy jeszcze poprawność odczytu: $f(4) = \log_2(4 - 2) - 1 = \log_2 2 - 1 = 0$ oraz $g(4) = 4 \cdot 4 - 4^2 = 0$, czyli $f(4) = g(4)$.

Z rysunku odczytujemy, że

$$f(x) \geq g(x) \iff x \in \langle 4, +\infty \rangle.$$

Zatem rozwiązaniem nierówności jest przedział $\langle 4, +\infty \rangle$.

Przykład 22. Rozwiązać równanie

a) $\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} = 0;$

b) $\log_4(x + 3) - 2 = \log_4(x - 1) - \log_4 8;$

c) $\log_5(x - 2)\sqrt{x - 5} = 2\sqrt{x - 5};$

d) $\frac{4}{\log_{\frac{1}{2}} x - 2} = 1 + \log_{\frac{1}{2}} x;$

e) $\log_2(10 - 3^x) = 16^{\log_4 \sqrt{2-x}}.$

Rozwiązanie:

Ad a) Wyznaczamy dziedzinę równania

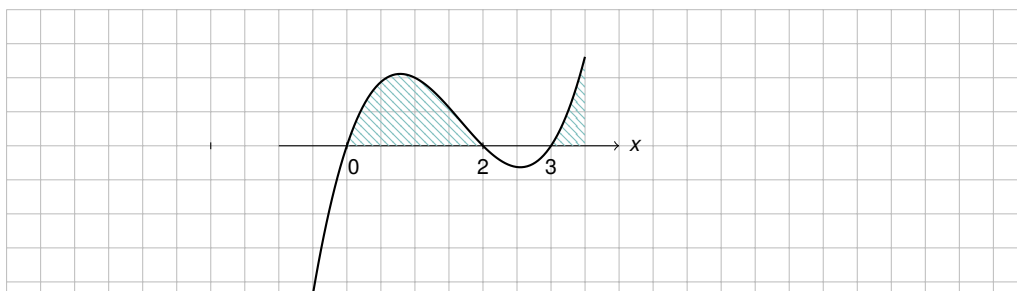
$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 2x}{x - 3} > 0 \wedge x - 3 \neq 0 \wedge \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} > 0 \right\}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 2x}{x - 3} > 0 \wedge x - 3 \neq 0 \wedge \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} > 0 \\ \iff (x^2 - 2x)(x - 3) > 0 \wedge x \neq 3 \wedge \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} > \log_8 1 \\ \stackrel{(*)}{\iff} \stackrel{(**)}{x(x - 2)(x - 3) > 0 \wedge x \neq 3 \wedge \frac{x^2 - 2x}{x - 3} > 1} \\ \iff x \in (0, 2) \cup (3, +\infty) \wedge \frac{x^2 - 2x}{x - 3} - 1 > 0 \\ \iff x \in (0, 2) \cup (3, +\infty) \wedge \frac{x^2 - 2x - x + 3}{x - 3} > 0 \\ \iff x \in (0, 2) \cup (3, +\infty) \wedge (x^2 - 3x + 3)(x - 3) > 0 \\ \stackrel{(***)}{\iff} x \in (0, 2) \cup (3, +\infty) \wedge x - 3 > 0 \\ \iff x \in (0, 2) \cup (3, +\infty) \wedge x \in (3, +\infty) \iff x \in (3, +\infty). \end{aligned}$$

(*) Nierówność nie zmienia kierunku wynika to z faktu, że funkcja logarytmiczna o podstawie należącej do przedziału $(1, \infty)$ jest rosnąca.

(**) Rozwiązanie nierówności $x(x - 2)(x - 3) > 0$ odczytujemy z poniższego wykresu.



$$x(x-2)(x-3) > 0 \iff x \in (0, 2) \cup (3, +\infty)$$

(***). Zauważmy, że $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x^2 - 3x + 3 > 0$ więc $(x^2 - 3x + 3)(x - 3) > 0 \iff x - 3 > 0$.
Zatem dziedziną równania jest zbiór $D = (3, +\infty)$.

Przejdźmy teraz do rozwiązania równania. Korzystając z definicji logarytmu mamy

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}} \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} = 0 \wedge x \in D &\iff \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \wedge x \in D \\ &\iff \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} = 1 \wedge x \in D \iff \frac{x^2 - 2x}{x - 3} = 8^1 \wedge x \in D \\ &\iff \frac{x^2 - 2x}{x - 3} - 8 = 0 \wedge x \in D \iff \frac{x^2 - 2x - 8x + 24}{x - 3} = 0 \wedge x \in D \\ &\iff \frac{x^2 - 10x + 24}{x - 3} = 0 \wedge x \in D \stackrel{(*)}{\iff} x^2 - 10x + 24 = 0 \wedge x \in D \\ &\iff (x = 4 \vee x = 6) \wedge x \in (3, +\infty) \iff x \in \{4, 6\} \end{aligned}$$

(*) Wykorzystujemy znany fakt, że

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \wedge x \in \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\} \iff P(x) = 0 \wedge x \in \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

Ad b) Wyznaczamy dziedzinę równania

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x + 3 > 0 \wedge x - 1 > 0\} = (1, +\infty).$$

Z własności logarytmu wiemy, że $2 = 2 \log_4 4 = \log_4 4^2 = \log_4 16$, zatem

$$\begin{aligned} \log_4(x+3) - 2 &= \log_4(x-1) - \log_4 8 \wedge x \in D \\ &\iff \log_4(x+3) - \log_4 16 = \log_4(x-1) - \log_4 8 \wedge x \in D \\ &\stackrel{(ii)}{\iff} \log_4 \frac{x+3}{16} = \log_4 \frac{x-1}{8} \wedge x \in D \end{aligned}$$

Korzystając z faktu, że funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa w swojej dziedzinie otrzymujemy

$$\begin{aligned}\log_4 \frac{x+3}{16} = \log_4 \frac{x-1}{8} \wedge x \in D &\iff \frac{x+3}{16} = \frac{x-1}{8} \wedge x \in D \iff x+3 = 2(x-2) \wedge x \in D \\ &\iff -x = -7 \wedge x \in D \iff x = 7 \wedge x \in (1, +\infty) \iff x = 7\end{aligned}$$

Ad c) Wyznaczamy dziedzinę równania

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x-2 > 0 \wedge x-5 \geq 0\} = \langle 5, +\infty \rangle.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned}\log_5(x-2)\sqrt{x-5} &= 2\sqrt{x-5} \wedge x \in D \iff \sqrt{x-5}(\log_5(x-2) - 2) = 0 \wedge x \in D \\ &\iff (\sqrt{x-5} = 0 \vee \log_5(x-2) - 2 = 0) \wedge x \in D \\ &\iff (x-5 = 0 \vee \log_5(x-2) = 2) \wedge x \in D \stackrel{(*)}{\iff} (x = 5 \vee x-2 = 5^2) \wedge x \in D \\ &\iff (x = 5 \vee x = 27) \wedge x \in \langle 5, +\infty \rangle \iff x \in \{5, 27\}\end{aligned}$$

(*) Z definicji logarytmu mamy: $\log_5(x-2) = 2 \iff x-2 = 5^2$.

Ad d) Wyznaczamy dziedzinę równania

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \neq 0\right\} = \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right).$$

Podstawiając za $\log_{\frac{1}{2}} x = t$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{4}{\log_{\frac{1}{2}} x - 2} &= 1 + \log_{\frac{1}{2}} x \wedge x \in D \\ &\iff \frac{4}{t-2} = 1 + t \wedge t = \log_{\frac{1}{2}} x \wedge t \neq 2 \wedge x \in D\end{aligned}$$

Następnie rozwiązując równanie wymierne dostajemy

$$\begin{aligned}
 & \frac{4}{t-2} - 1 - t = 0 \wedge t = \log_{\frac{1}{2}} x \wedge t \neq 2 \wedge x \in D \\
 & \iff \frac{4}{t-2} - \frac{(1+t)(t-2)}{t-2} = 0 \wedge t = \log_{\frac{1}{2}} x \wedge t \neq 2 \wedge x \in D \\
 & \stackrel{(*)}{\iff} \frac{-t^2 + t + 6}{t-2} = 0 \wedge t = \log_{\frac{1}{2}} x \wedge t \neq 2 \wedge x \in D \\
 & \iff t^2 - t - 6 = 0 \wedge t = \log_{\frac{1}{2}} x \wedge t \neq 2 \wedge x \in D \\
 & \iff (t = -2 \vee t = 3) \wedge t = \log_{\frac{1}{2}} x \wedge t \neq 2 \wedge x \in D \\
 & \iff (\log_{\frac{1}{2}} x = -2 \vee \log_{\frac{1}{2}} x = 3) \wedge x \in D \\
 & \stackrel{(**)}{\iff} \left(x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \vee x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right) \wedge x \in D \\
 & \iff \left(x = 4 \vee x = \frac{1}{8} \right) \wedge x \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right) \\
 & \iff x \in \left\{\frac{1}{8}, 4\right\}.
 \end{aligned}$$

(*) Wykorzystujemy fakt, że

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \wedge x \in \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\} \iff P(x) = 0 \wedge x \in \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

(**) Korzystamy z definicji logarytmu.

Ad e) Wyznaczamy dziedzinę równania

$$\begin{aligned}
 D &= \{x \in \mathbb{R} : 10 - 3^x > 0 \wedge 2 - x \geq 0 \wedge \sqrt{2-x} > 0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : 3^x < 10 \wedge x < 2\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x < \log_3 10 \wedge x < 2\}
 \end{aligned}$$

Funkcja $f(x) = \log_3 x, x > 0$ jest funkcją rosnącą wobec tego $2 = \log_3 9 < \log_3 10$ gdyż

$9 < 10$. Zatem dziedziną naszego równania jest zbiór $D = (-\infty, 2)$.

Przejdźmy teraz do rozwiązywania równania

$$\begin{aligned} \log_3(10 - 3^x) &= 16^{\log_4 \sqrt{2-x}} \wedge x \in D \iff \log_3(10 - 3^x) = (4^2)^{\log_4 \sqrt{2-x}} \wedge x \in D \\ &\stackrel{(iii)}{\iff} \log_3(10 - 3^x) = 4^{\log_4(\sqrt{2-x})^2} \wedge x \in D \iff \log_3(10 - 3^x) = 4^{\log_4(2-x)} \wedge x \in D \\ &\stackrel{(IV)}{\iff} \log_3(10 - 3^x) = (2 - x) \wedge x \in D \stackrel{(III), (*)}{\iff} \log_3(10 - 3^x) = \log_3 3^{2-x} \wedge x \in D \\ &\iff 10 - 3^x = 3^{2-x} \wedge x \in D \iff 10 - 3^x = 9 \cdot 3^{-x} \wedge x \in D \\ &\iff 10 - 3^x - 9 \cdot \frac{1}{3^x} = 0 \wedge x \in D \stackrel{(**)}{\iff} -(3^x)^2 + 10 \cdot 3^x - 9 = 0 \wedge x \in D \\ &\iff -t^2 + 10t - 9 = 0 \wedge t = 3^x \wedge t > 0 \wedge x \in D \\ &\iff (t = 1 \vee t = 9) \wedge t = 3^x \wedge t > 0 \wedge x \in D \\ &\iff (3^x = 9 \vee 3^x = 1) \wedge x \in D \iff (3^x = 3^2 \vee 3^x = 3^0) \wedge x \in D \\ &\stackrel{(***)}{\iff} (x = 2 \vee x = 0) \wedge x \in (-\infty, 2) \iff x = 0 \end{aligned}$$

(*) Wykorzystujemy fakt, że funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa.

(**) Wiemy, że $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} 3^x > 0$, więc możemy przez 3^x obustronnie pomnożyć równanie.

(***) Korzystamy z różnowartościowości funkcji wykładniczej.

Przykład 23. Rozwiązać nierówności:

a) $\log_{\frac{1}{2}} |x - 1| \leq -2$;

d) $\log_x \frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{x} \leq -2$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x+1} < 1 + \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{4-x^2}$;

e) $\log_{x-4}(2x^2 - 9x + 4) > 1$.

c) $\log_2 x \cdot \log_3 x < \log_3 16$;

Rozwiązanie:

Ad a) Ustalmy dziedzinę nierówności

$$D = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned}
 \log_{\frac{1}{2}} |x-1| &\leq -2 \wedge x \in D \stackrel{(iii)}{\iff} \log_{\frac{1}{2}} |x-1| \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \wedge x \in D \\
 &\iff \log_{\frac{1}{2}} |x-1| \leq \log_{\frac{1}{2}} 4 \wedge x \in D \\
 &\stackrel{(*)}{\iff} |x-1| \geq 4 \wedge x \in D \\
 &\stackrel{(**)}{\iff} (x-1 \leq -4 \vee x-1 \geq 4) \wedge x \in D \\
 &\iff (x \leq -3 \vee x \geq 5) \wedge x \in \mathbb{R} - \{1\} \iff x \in (-\infty, -3) \cup (5, \infty).
 \end{aligned}$$

(*) Wykorzystujemy fakt, że funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $x > 0$ jest funkcją malejącą.

(**) Korzystamy z własności wartości bezwzględnej:

Jeżeli $g \geq 0$ to $|x| \geq g \iff (x \leq -g \vee x \geq g)$.

Ad b) Wyznaczamy dziedzinę nierówności

$$\begin{aligned}
 D &= \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0 \wedge \sqrt{x+1} > 0 \wedge \sqrt{4-x^2} > 0 \wedge 4-x^2 \geq 0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0 \wedge x+1 \neq 0 \wedge 4-x^2 > 0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x > -1 \wedge -2 < x < 2\} = (-1, 2)
 \end{aligned}$$

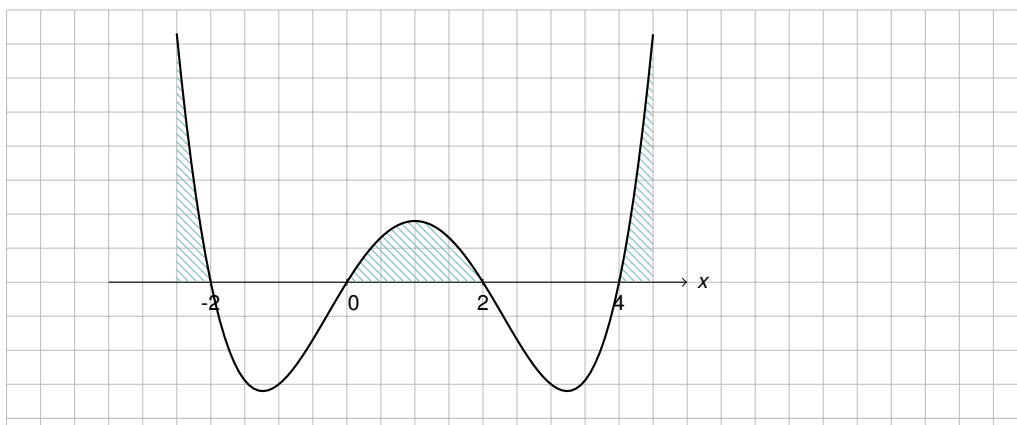
Stosując własności logarytmów otrzymujemy następujące przekształcenia

$$\begin{aligned}
 \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x+1} < 1 + \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{4-x^2} \wedge x \in D &\stackrel{(iii)}{\iff} \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} (x+1) < 1 + \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} (4-x^2) \wedge x \in D \\
 &\iff \log_{\frac{1}{2}} (x+1) < 2 + \log_{\frac{1}{2}} (4-x^2) \wedge x \in D \\
 &\stackrel{(III)}{\iff} \log_{\frac{1}{2}} (x+1) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} + \log_{\frac{1}{2}} (4-x^2) \wedge x \in D \\
 &\stackrel{(i)}{\iff} \log_{\frac{1}{2}} (x+1) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{4-x^2}{4} \wedge x \in D
 \end{aligned}$$

Korzystając z faktu, że funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $x > 0$ jest funkcją malejącą opuszczając logarytmy zmienimy zwrot nierówności na przeciwny

$$\begin{aligned}
 x + 1 &> \frac{4 - x^2}{4} \wedge x \in D \\
 \Leftrightarrow \frac{4 + 4x - 4 - x^2}{4(4 - x^2)} > 0 \wedge x \in D &\Leftrightarrow \frac{4x - x^2}{4(4 - x^2)} > 0 \wedge x \in D \\
 \Leftrightarrow 4(4x - x^2)(4 - x^2) > 0 \wedge x \in D &\Leftrightarrow 4x(x - 2)(x + 2)(x - 4) > 0 \wedge x \in D \\
 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (4, \infty) \wedge x \in (-1, 2) &\Leftrightarrow x \in (0, 2).
 \end{aligned}$$

(*) Rozwiązanie nierówności wielomianowej $x(x + 2)(x - 2)(x - 4) > 0$ odczytujemy z poniższego wykresu.



Zatem mamy

$$x(x + 2)(x - 2)(x - 4) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (4, \infty).$$

Ad c) Dziedziną nierówności jest zbiór $D = (0, +\infty)$. Mamy zatem

$$\log_2 x \cdot \log_3 x < \log_3 16 \wedge x \in D \stackrel{(iv)}{\Leftrightarrow} \log_2 x \frac{\log_2 x}{\log_2 3} < \log_3 16 \wedge x \in D$$

Zauważmy, że liczba $\log_2 3$ jest dodatnia więc

$$\begin{aligned} \frac{(\log_2 x)^2}{\log_2 3} < \log_3 16 \wedge x \in D &\iff (\log_2 x)^2 < \log_3 16 \cdot \log_2 3 \wedge x \in D \\ \stackrel{(iv)}{\iff} (\log_2 x)^2 < \frac{\log_2 16}{\log_2 3} \cdot \log_2 3 \wedge x \in D &\iff (\log_2 x)^2 < \log_2 16 \wedge x \in D \\ \iff (\log_2 x)^2 < 4 \wedge x \in D &\iff t^2 < 4 \wedge t = \log_2 x \wedge t \in \mathbb{R} \wedge x \in D \\ \iff -2 < t < 2 \wedge t = \log_2 x \wedge t \in \mathbb{R} \wedge x \in D &\iff -2 < \log_2 x < 2 \wedge x \in D \\ \stackrel{(III)}{\iff} \log_2 2^{-2} < \log_2 x < \log_2 2^2 \wedge x \in D &\stackrel{(*)}{\iff} \frac{1}{4} < x < 4 \wedge x \in (0, +\infty) \iff x \in \left(\frac{1}{4}, 4\right). \end{aligned}$$

(*)"Opuszczając logarytmy" nie zmieniamy kierunku nierówności, gdyż funkcja $f(x) = \log_3 x$, $x > 0$ jest funkcją rosnącą.

Ad d) Dziedzina nierówności to zbiór $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 0\} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

$$\begin{aligned} \log_x \frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{x} &\leq -2 \wedge x \in D \stackrel{(iv)}{\iff} \frac{\log_2 \frac{1}{2}}{\log_2 x} + \log_2 \frac{1}{x} \leq -2 \wedge x \in D \\ \iff \frac{-1}{\log_2 x} - \log_2 x &\leq -2 \wedge x \in D \\ \iff \frac{-1}{t} - t &\leq -2 \wedge t = \log_2 x \wedge t \neq 0 \wedge x \in D \\ \iff \frac{-1 - t^2 + 2t}{t} &\leq 0 \wedge t = \log_2 x \wedge t \neq 0 \wedge x \in D \\ \iff -(t^2 - 2t + 1)t &\leq 0 \wedge t = \log_2 x \wedge t \neq 0 \wedge x \in D \\ \iff -t(t-1)^2 &\leq 0 \wedge t = \log_2 x \wedge t \neq 0 \wedge x \in D \\ \stackrel{(*)}{\iff} t &\in (0, +\infty) \wedge t = \log_2 x \wedge t \neq 0 \wedge x \in D \\ \iff \log_2 x > 0 \wedge x \in D &\iff \log_2 x > \log_2 1 \wedge x \in D \\ \stackrel{(**)}{\iff} x &> 1 \wedge x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \\ \iff x &\in (1, +\infty) \end{aligned}$$

(*) Zauważmy, że $\bigwedge_{t \neq 0} (t-1)^2 > 0$ więc $-t(t-1)^2 \leq 0 \iff -t \leq 0 \iff t \geq 0$.

(**) Znak nierówności nie ulega zmianie gdyż funkcja $f(x) = \log_2 x$, $x > 0$ jest funkcją rosnącą.

Ad e) Ustalmy dziedzinę nierówności

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : x-4 > 0 \wedge x-4 \neq 1 \wedge 2x^2 - 9x + 4 > 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x-4 > 0 \wedge x \neq 5 \wedge x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (4, +\infty)\right\} \\ &= (4, 5) \cup (5, +\infty) \end{aligned}$$

Przejdźmy do rozwiązania nierówności

$$\begin{aligned} &\log_{x-4}(2x^2 - 9x + 4) > 1 \wedge x \in (4, 5) \cup (5, +\infty) \\ &\stackrel{(*)}{\iff} \log_{x-4}(2x^2 - 9x + 4) > \log_{x-4}(x-4) \wedge (x \in (4, 5) \vee x \in (5, +\infty)) \\ &\stackrel{(**)}{\iff} \left[(\log_{x-4}(2x^2 - 9x + 4) > \log_{x-4}(x-4) \wedge x \in (4, 5)) \right. \\ &\quad \left. \vee (\log_{x-4}(2x^2 - 9x + 4) > \log_{x-4}(x-4) \wedge x \in (5, +\infty)) \right] \\ &\stackrel{(***)}{\iff} \left[(2x^2 - 9x + 4 < x-4 \wedge x \in (4, 5)) \vee (2x^2 - 9x + 4 > x-4 \wedge x \in (5, +\infty)) \right] \\ &\iff \left[(2x^2 - 10x + 8 < 0 \wedge x \in (4, 5)) \vee (2x^2 - 10x + 8 > 0 \wedge x \in (5, +\infty)) \right] \\ &\iff [(x \in (1, 4) \wedge x \in (4, 5)) \vee (x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty) \wedge x \in (5, +\infty))] \\ &\iff [x \in \emptyset \vee x \in (5, +\infty)] \iff x \in (5, +\infty) \end{aligned}$$

(*) Korzystamy definicji sumy zbiorów $x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$.

(**) Wykorzystujemy prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy.

(***) Wiemy, że funkcja $f(x) = \log_a x$, $x > 0$, $a \in (0, 1)$ jest funkcją malejącą i "opuszczając logarytmy" zmieniamy znak nierówności na przeciwny, zaś funkcja $f(x) = \log_a x$, $x > 0$, $a \in (1, \infty)$ jest funkcją rosnącą, znak nierówności pozostaje bez zmian.



Literatura

- [1] Bańkowska E., Cewe A., Stankiewicz D., *Egzamin wstępny na wyższe uczelnie : zbiór zadań* , Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 1997.
- [2] Kłaczko K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników klasa III-IV*. Wydawnictwo Pazdro, Warszawa 1999.
- [3] Kłaczko K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Podręcznik do I klasy*. Wydawnictwo Pazdro, Warszawa 1999.
- [4] Kłaczko K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Podręcznik do III i IV klasy*. Wydawnictwo Pazdro, Warszawa 2001.
- [5] Kurczab M., Kurczab E., Świda E., *Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Klasa 2. Zakres rozszerzony*. Wydawnictwo Pazdro, Warszawa 2013.
- [6] Kurczab M., Kurczab E., Świda E., *Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Klasa 4. Zakres rozszerzony*. Wydawnictwo Pazdro, Warszawa 2022.
- [7] Kowalczyk R., Niedziałowski K., Obczyński C., *Matematyka dla studentów i kandydatów na wyższe uczelnie. Repetytorium*. PWN, Warszawa 2013.
- [8] Skoczylas Z., Gewert M., *Wstęp do analizy i algebry*. Oficyna Wydawnicza GIS, 2011

