

MATERIAŁY DYDAKTYCZNE
do zajęć wyrównawczych z przedmiotu:
FIZYKA
dla studentów kierunku
INŻYNIERIA LOGISTYKI

Opracował zespół w składzie:

Dr Agnieszka Surowiec

Lublin 2025 r.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.
Utwór dostępny jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe.

Kinematyka

Zadanie 1.1 (składanie wektorów)

Wektory $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ mają tę samą długość v . Kąt między nimi jest równy θ . Jaka jest wartość bezwzględna różnicy $|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$?

Dane:

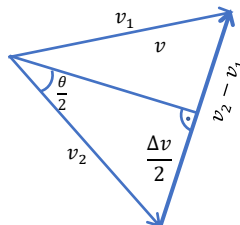
$$v_1 = v_2 = v,$$

θ .

Szukane:

$$\Delta v.$$

Oznaczmy $\Delta v = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$. Jest to podstawa trójkąta równoramiennego pokazanego na rysunku poniżej



Zatem

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{1}{2} \Delta v}{v},$$

$$\Delta v = 2v \sin \frac{\theta}{2}.$$

Zadanie 1.2 (składanie prędkości)

Łódź motorowa przepływa między dwiema przystaniami położonymi na rzece w odległości 30 km, przy czym płynąc w górę rzeki (pod prąd) odległość tę pokonuje w czasie 45 min, a płynąc w dół rzeki (z prądem) – w czasie 30 min. Obliczyć prędkość motorówki względem wody oraz prędkość prądu rzeki.

Dane:

$$s = 30 \text{ km} = 30000 \text{ m},$$

$$t_1 = 45 \text{ min} = 2700 \text{ s},$$

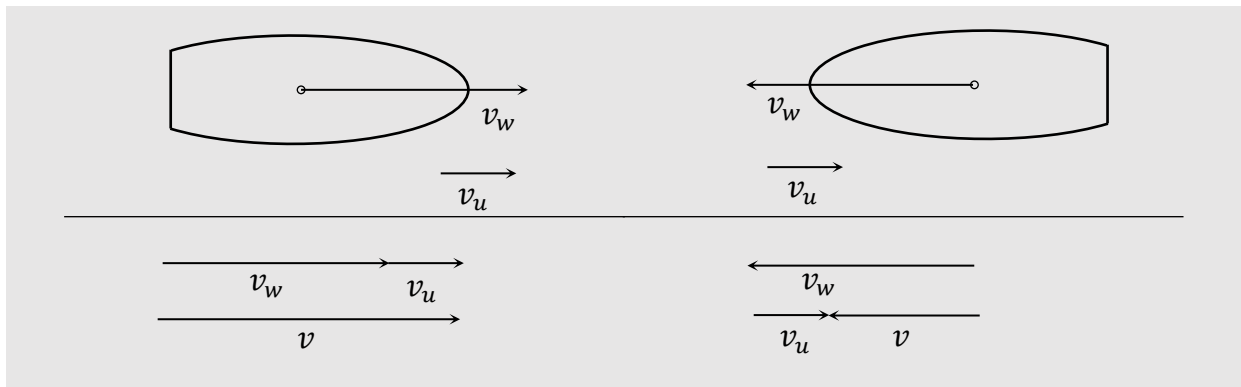
$$t_2 = 30 \text{ min} = 1800 \text{ s}.$$

Szukane:

v_w , – prędkość motorówki,

v_u – prędkość nurtu rzeki.

Rozwiązanie: prędkość motorówki v_1 względem brzegu, przyjęto za układ odniesienia, w czasie płynięcia pod prąd:



$$v_1 = v_w - v_u,$$

natomiast jej prędkość v_2 podczas płynięcia z prądem rzeki wynosi

$$v_2 = v_w + v_u.$$

Równanie ruchu motorówki w górę rzeki ma postać

$$s = v_1 t_1, \quad \text{czyli} \quad s = (v_w - v_u) t_1.$$

Analogicznie równanie ruchu motorówki w dół rzeki ma postać

$$s = v_2 t_2, \quad \text{czyli} \quad s = (v_w + v_u) t_2.$$

Stąd mamy

$$v_w - v_u = \frac{s}{t_1} \quad \text{oraz} \quad v_w + v_u = \frac{s}{t_2}.$$

Po rozwiązaniu tego układu równań względem v_w i v_u otrzymujemy

$$v_w = \frac{s(t_1 + t_2)}{2t_1 t_2},$$

$$v_u = \frac{s(t_1 - t_2)}{2t_1 t_2},$$

co po podstawieniu danych liczbowych daje

$$v_w = 14 \frac{m}{s},$$

$$v_u = 2,8 \frac{m}{s}.$$

Odpowiedź: Prędkość motorówki względem wody (stojącej) wynosi

$$v_w = 14 \frac{m}{s} \approx 50 \text{ km/h}, \text{ a prędkość prądu rzeki } v_u = 2,8 \frac{m}{s}.$$

Zadanie 1.3 (ruch jednostajny)

Z Lublina do oddalonej o 180 km Warszawy wyjeżdża pociąg pospieszny i jedzie z prędkością 54 km/h. Po 20 minutach z Warszawy wyrusza pociąg osobowy do Lublina a jego prędkość średnia wynosi 36 km/h. Po jakim czasie i w jakiej odległości od Lublina pociągi się spotkają?

Dane:

$$s = 180 \text{ km} = 180000 \text{ m},$$

$$v_1 = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s},$$

$$v_2 = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s},$$

$$t_1 = 20 \text{ min} = 1200 \text{ s}.$$

Szukane:

$$t, s_1.$$

Rozwiązanie: równanie ruchu dla pociągu pospiesznego ma postać:

$$s_1 = v_1 t,$$

a dla pociągu osobowego

$$s - s_1 = v_2(t - t_1).$$

Dodając oba równania stronami, otrzymujemy:

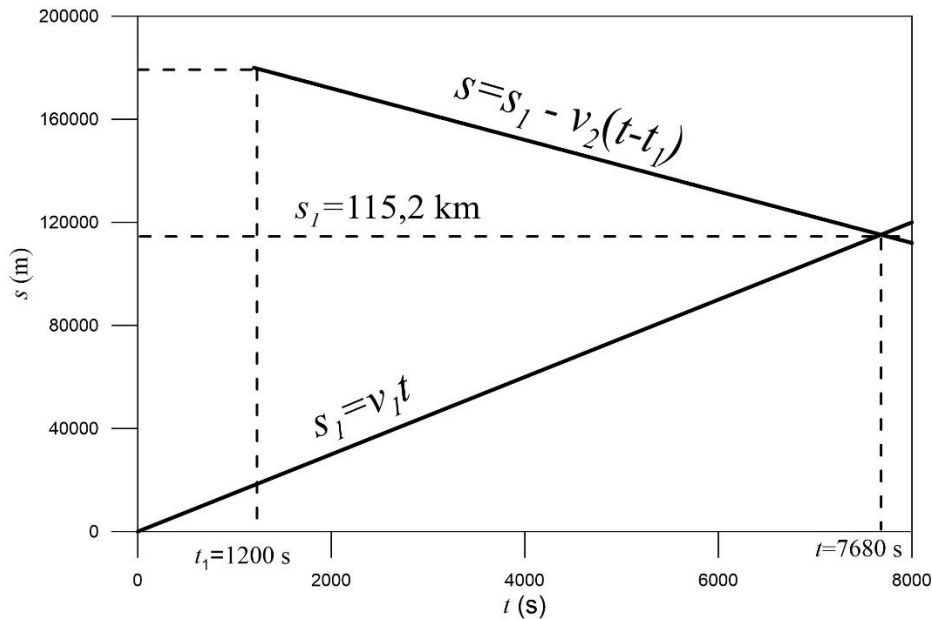
$$s = v_1 t + v_2 t - v_2 t_1.$$

Stąd

$$t = \frac{s + v_2 t_1}{v_1 + v_2} = \frac{180000 + 10 \cdot 1200}{15 + 10} = 7680 \text{ s} = 2 \text{ h } 8 \text{ min},$$

$$s_1 = v_1 t = \frac{v_1(s + v_2 t_1)}{v_1 + v_2} = \frac{15(180000 + 10 \cdot 1200)}{15 + 10} = 111600 \text{ m} = 111,6 \text{ km}.$$

W układzie współrzędnych prostokątnych s, t wykreślono z punktu początkowego o współrzędnych $s_1=0 \text{ km } t=0 \text{ s}$ prostą $s_1 = v_1 t$, stanowiącą graficzny obraz równania ruchu pociągu pospiesznego, a z punktu o współrzędnych $s_1 = 180 \text{ km}$ i $t_1 = 1200 \text{ s}$ prostą $s - s_1 = v_2(t - t_1)$, będącą graficznym obrazem równania ruchu pociągu osobowego. Czas i odległość spotkania pociągów są określone na wykresie punktu przecięcia się obu prostych.



Zadanie 1.4 (prędkość średnia)

Motocyklista przejechał $1/3$ drogi z prędkością $v_1 = 10$ m/s i pozostałe $2/3$ drogi z prędkością $v_2 = 20$ m/s. Znajdź średnią prędkość motocyklisty na całym odcinku drogi.

Dane:

$$s_1 = 1/3 \Delta s,$$

$$s_2 = 2/3 \Delta s,$$

$$v_1 = 10 \text{ m/s},$$

$$v_2 = 20 \text{ m/s}.$$

Szukane:

$$v_{\text{śr.}}$$

Prędkość średnią liczymy jako iloraz całkowitej drogi przez całkowity czas trwania ruchu.

$$v_{\text{śr}} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

$$\Delta s = s_1 + s_2.$$

Natomiast

$$\Delta t = t_1 + t_2,$$

gdzie

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} \text{ oraz } t_2 = \frac{s_2}{v_2}.$$

Wstawiając do pierwszego wzoru otrzymujemy

$$v_{\text{sr}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} = \frac{\Delta s}{\frac{\Delta s}{3v_1} + \frac{2\Delta s}{3v_2}}.$$

Upraszczając

$$v_{\text{sr}} = \frac{3v_1v_2}{2v_1 + v_2}.$$

Podstawiając dane liczbowe $v_{\text{sr}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Zadanie 1.5 (prędkość średnia)

Biegacz przebiegł połowę trasy z prędkością $v_1 = 18 \text{ km/h}$ a drugą połowę z inną prędkością v_2 . Gdyby biegł cały czas ze stałą prędkością $v = 12 \text{ km/h}$ to czas potrzebny na przebycie całej trasy nie zmieniłby się. Oblicz wartość prędkości v_2 .

Dane:

$$s_1 = s_2 = 1/2 \Delta s,$$

$$v_1 = 18 \text{ km/h},$$

$$v_{\text{sr}} = 12 \text{ m/s}.$$

Szukane:

$$v_2.$$

Zacznijmy od policzenia średniej prędkości. Prędkość średnią liczymy jako iloraz całkowitej drogi przez całkowity czas trwania ruchu.

$$v_{\text{sr}} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

$$\Delta s = s_1 + s_2.$$

Natomiast

$$\Delta t = t_1 + t_2,$$

gdzie

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} \text{ oraz } t_2 = \frac{s_2}{v_2}.$$

Wstawiając do pierwszego wzoru otrzymujemy

$$v_{\text{sr}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} = \frac{\Delta s}{\frac{\Delta s}{2v_1} + \frac{\Delta s}{2v_2}}.$$

Upraszczając

$$v_{sr} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Z powyższego wzoru wyznaczamy v_2

$$(v_1 + v_2)v_{sr} = 2v_1v_2,$$

$$v_2 = \frac{v_1v_{sr}}{2v_1 - v_{sr}}.$$

Podstawiając dane liczbowe $v_2 = 9 \frac{km}{h}$.

Zadanie 1.6 (ruch jednostajnie przyspieszony)

Rozważ pociąg, który może osiągnąć przyspieszenie 20 cm/s^2 i zwalniać z opóźnieniem 100 cm/s^2 . Znajdź najkrótszy czas t , w jakim pociąg może przebyć dystans między dwiema stacjami oddalonymi od siebie o 2 km .

Dane:

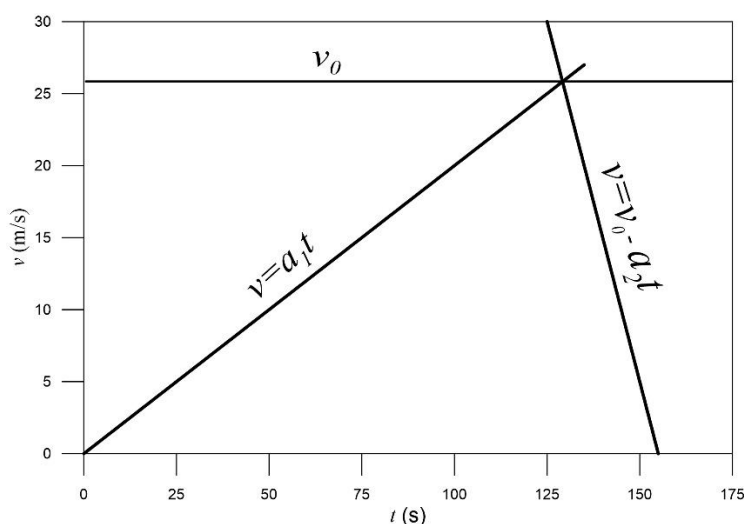
$$a_1 = 20 \text{ cm/s}^2,$$

$$a_2 = 100 \text{ cm/s}^2,$$

$$s = 2 \text{ km}.$$

Szukane:

$$t_{min}.$$



W pierwszym etapie ruchu pociąg będzie poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem a_1 , aż osiągnie prędkość v_0 , a następnie ruchem

jednostajnie opóźnionym z opóźnieniem a_2 tak aby po przejechaniu łącznego dystansu jego prędkość końcowa była równa zero (pociąg zatrzymuje się po przejechaniu 2 km).
Prędkość maksymalna w ruchu jednostajnie przyspieszonym

$$v_0 = a_1 t_1$$

oraz opóźnionym

$$0 = v_0 - a_2 t_2.$$

Równania ruchu można zapisać:

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2,$$

$$s_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2.$$

Po wstawieniu czasu z pierwszego równania do równań ruchu otrzymujemy

$$s_1 = \frac{v_0^2}{2a_1},$$

$$s_2 = \frac{v_0^2}{a_2} - \frac{v_0^2}{2a_2} = \frac{v_0^2}{2a_2}.$$

Zważywszy, że $s_1 + s_2 = s$

$$s = \frac{v_0^2}{2a_1} + \frac{v_0^2}{2a_2} = \frac{v_0^2}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right).$$

Stąd wyznaczamy v_0

$$v_0 = \sqrt{\frac{2a_1 a_2 s}{a_1 + a_2}} = 25,8 \frac{m}{s}.$$

Z definicji ruchu jednostajnie przyspieszonego możemy policzyć czas

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Czas w ruchu jednostajnie przyspieszonym

$$t_1 = \frac{v_0}{a_1} = 129 s.$$

Czas w ruchu jednostajnie opóźnionym

$$t_2 = \frac{v_0}{a_2} = 26 s.$$

Całkowity najkrótszy czas, w jakim pociąg przebędzie 2 km wynosi 155 s.

Zadanie 1.7 (ruch jednostajnie przyspieszony)

Naddźwiękowy samolot od chwili ruszenia z miejsca na pasie startowym do momentu osiągnięcia końcowej prędkości porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem a . Po upływie czasu T od momentu ruszenia samolotu, w miejscu jego startu eksploduje ładunek wybuchowy. Jaki warunek musi być spełniony, aby fala dźwiękowa dotarła do samolotu? Wyznacz czas, w którym samolot i fala dźwiękowa znajdują się w tym samym punkcie przestrzeni w tym samym czasie. Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi v .

Dane:

T, v, a .

Szukane:

t .

Równanie ruchu samolotu

$$s_1 = \frac{at^2}{2}.$$

Równanie ruchu dźwięku eksplozji

$$s_2 = v(t - T).$$

Samolot i dźwięk muszą się spotkać w tym samym miejscu zatem $s_1 = s_2$, stąd

$$\frac{at^2}{2} = v(t - T).$$

Z tego równania wyznaczamy czas, po upływie którego dźwięk i samolot będą w takiej samej odległości od punktu startowego. Przekształcając to równanie mamy równanie kwadratowe

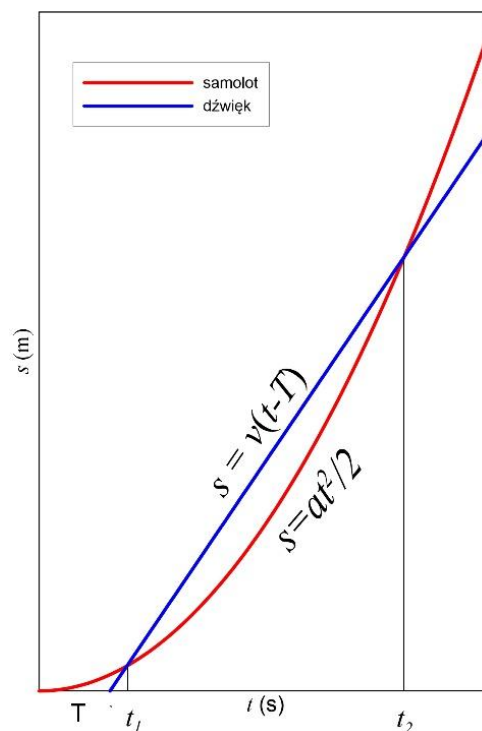
$$at^2 - 2vt + 2vT = 0.$$

Zatem, aby fala dźwiękowa mogła dotrzeć do samolotu musi być spełniony warunek $\sqrt{\Delta} \geq 0$

$$v^2 - 2avT \geq 0.$$

Stąd

$$T \leq \frac{v}{2a}.$$



Policzmy czas, po którym nastąpi spotkanie samolotu i fali dźwiękowej

$$t_1 = \frac{v}{a} - \frac{\sqrt{v^2 - 2avT}}{a},$$

$$t_2 = \frac{v}{a} + \frac{\sqrt{v^2 - 2avT}}{a}.$$

Zadanie 1.8 (ruch jednostajnie przyspieszony)

Jedną piłkę wyrzucono z powierzchni ziemi pionowo do góry z prędkością początkową v_0 , drugą zaś jednocześnie puszczało z wysokości h_0 . Na jakiej wysokości piłki miną się i po jakim czasie od rozpoczęcia ruchu to nastąpi?

Dane:

h_0, v_0 .

Szukane:

h, t .

Równanie ruchu piłki w górę

$$y_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Równanie ruchu piłki w dół

$$y_2 = h_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Aby piłki minęły się, muszą się znaleźć w tym samym czasie na tej samej wysokości

$$y_1 = y_2.$$

Zatem

$$v_0 t - \frac{gt^2}{2} = h_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

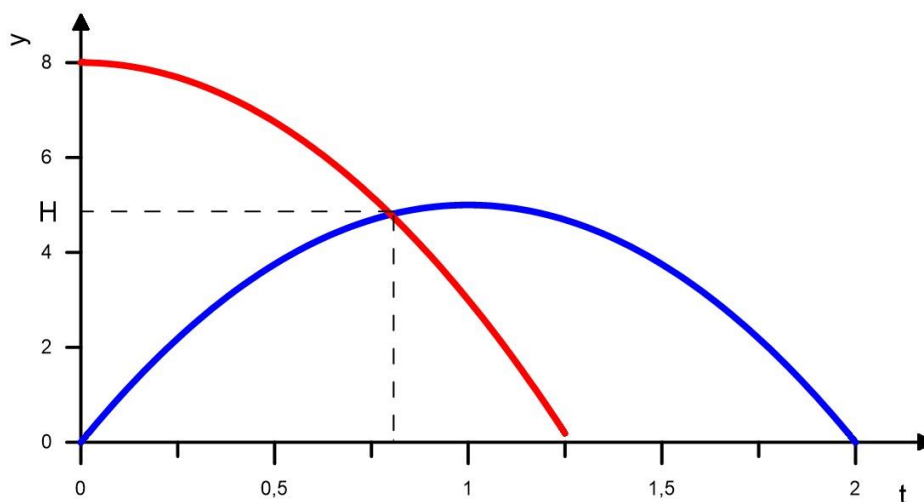
Stąd

$$t = \frac{h_0}{v_0}.$$

A wysokość możemy wyznaczyć z drugiego równania

$$H = h_0 - \frac{gh_0^2}{2v_0^2}.$$

Rozwiązanie graficzne problemu (linia czerwona - piłka zrzucona w dół, linia niebieska – piłka podrzucona do góry). W rozwiązaniu przyjęto $h_0 = 8m$, $v_0 = 10 \frac{m}{s}$.



Zadanie 1.9 (ruch jednostajnie przyspieszony)

Z balonu unoszącego się na wysokości 20 m zrzucono worek z piaskiem. Oblicz czas spadania na Ziemię oraz prędkość w chwili uderzenia. Rozpatrz przypadek, gdy balon wznosi się go góry z prędkością $v = \frac{5m}{s}$.

Opór powietrza pominąć.

Dane:

$$h = 20 \text{ m},$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2,$$

$$v_0 = 5 \text{ m/s}.$$

Szukane:

$$t_1, t_2, v.$$

W przypadku, gdy balon unosi się na stałej wysokości to jego prędkość względem ziemi jest równa $v_0 = 0$. Worek wyrzucony z balonu będzie się poruszał ruchem jednostajnie przyspieszonym w dół z przyspieszeniem g .

$$h = \frac{gt^2}{2}.$$

Stąd wprost można policzyć czas spadania

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2 \text{ s}.$$

Prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym w polu grawitacyjnym Ziemi:

$$v = gt.$$

wstawiając z poprzedniego równania czas mamy:

$$v = \sqrt{2gh} = 19,8 \frac{m}{s}.$$

W przypadku, gdy balon unosi się za stałą prędkością do góry to worek, który wypada z balonu także w początkowej chwili będzie się unosił do góry względem ziemi. Jego ruch będzie jednostajnie opóźniony z przyspieszeniem g . Policzmy na jaką dodatkową wysokość wzniesie się worek.

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Stąd łatwo policzyć, że czas wznoszenia jest równy

$$t = \frac{v_0}{g},$$

a czas opadania z wysokości $s + h$ będzie równy t_o .

$$t_o = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}.$$

Reasumując, całkowity czas, po jakim worek uderzy w ziemię jest równy

$$t_2 = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} = 2,6 \text{ s},$$

natomiast prędkość

$$v = \sqrt{2g(h + s)}.$$

Wstawiając za $s = \frac{v_0^2}{2g}$ mamy

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{v_0^2}{2g}\right)} = 20,4 \text{ m/s}.$$

Zadanie 1.10 (rzut poziomy)

Bombowiec leci na wysokości 600 m z prędkością poziomą 120 m/s. Oblicz w jakiej odległości przed celem powinna być zwolniona bomba, aby osiągnęła cel. Jaki jest czas jej spadania i pod jakim kątem uderzy w powierzchnię ziemi. Podaj równanie ruchu i równanie toru po jakim będzie się poruszać bomba.

Dane:

$$h = 600 \text{ m},$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2,$$

$$v = 120 \text{ m/s}.$$

Szukane:

$$x, t, \alpha,$$

$$x(t),$$

$$y(x).$$

Nie uwzględniając oporów powietrza ruch bomby możemy rozłożyć na dwie składowe.

Składowa pozioma (x) - bomba będzie poruszała się ruchem jednostajnym z prędkością początkowa równą prędkości samolotu

Składowa pionowa (y)- bomba będzie poruszała się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem g .

Równania ruchu można zapisać $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$

Stąd można zapisać równanie toru bomby

$$y = h - \frac{g x^2}{2 v_0^2}.$$

W momencie upadku bomby na ziemię $y = 0$. Stąd możemy obliczyć zasięg bomby

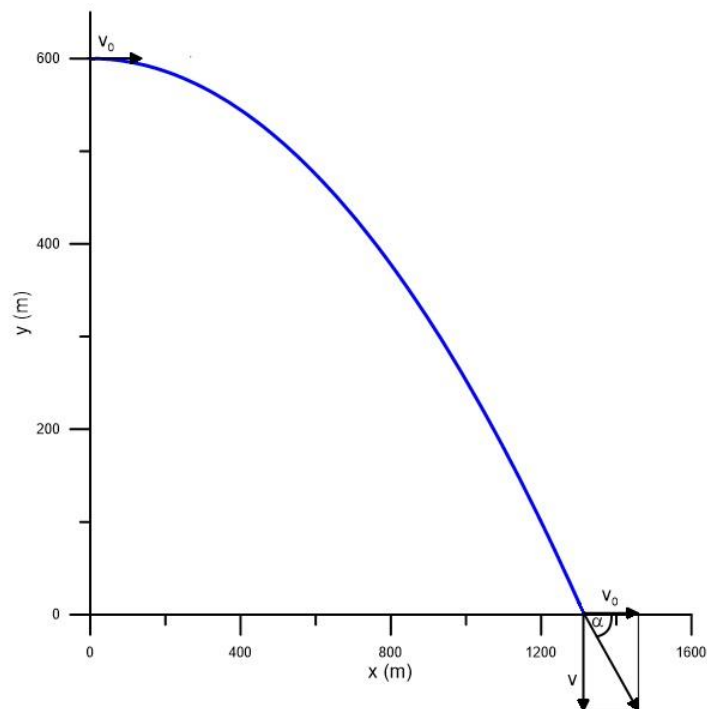
$$x = z = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1314 \text{ m},$$

czas spadania

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 11 \text{ s}$$

oraz prędkość z jaką bomba uderzy w ziemię

$$v = \sqrt{2gh} = 110 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Na podstawie rysunku możemy zapisać zależność pod jakim kątem bomba uderzy w ziemię

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{v_0} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}.$$

Stąd

$$\alpha = \arctg \frac{\sqrt{2gh}}{v_0} = 42,4^\circ.$$

Zadanie 1.11 (rzut poziomy)

Znaleźć szybkość kulki, jeżeli po wystrzale z pistoletu w kierunku poziomym kula przebiła dwie pionowe kartki papieru ustawione w odległości $l=20$ cm od siebie, przy czym okazało się, że otwór w drugiej kartce znajduje się o $h=5$ cm niżej niż otwór w pierwszej kartce.

Dane:

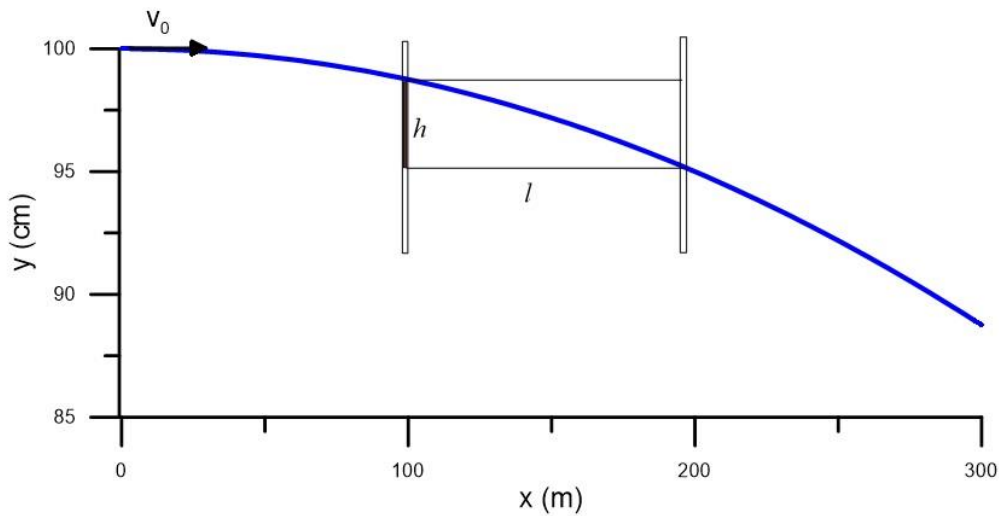
$$l = x = 20 \text{ m},$$

$$h = y = 0,05 \text{ m},$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2.$$

Szukane:

$$t_1, t_2, v.$$



Równanie ruchu kuli (z dokładnością do znaku) można zapisać korzystając z poprzedniego zadania

$$y = \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Stąd wyznaczamy prędkość kuli

$$v_0 = x \sqrt{\frac{g}{2y}} = l \sqrt{\frac{g}{2h}} = 200 \frac{m}{s}.$$

Zadanie 1.12 (rzut ukośny)

Oblicz zasięg pewnego działu, jeśli prędkość wystrzału pocisku wynosi 200 m/s, a kąt nachylenia lufy względem poziomu wynosi 30°. Podaj równania ruchu i trajektorię pocisku. Oblicz maksymalną wysokość na jaką może się wznieść pocisk.

Dane:

$$v = 200 m/s,$$

$$\alpha = 30^\circ,$$

$$g = 9,81 m/s^2.$$

Szukane:

$z,$

$x(t), y(x),$

$H_{max}.$

Równania ruchu można zapisać
$$\begin{cases} x = v_0 t \cdot \cos \alpha \\ y = v_0 t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

Wyznaczając z pierwszego równania czas i wstawiając do drugiego równania możemy wyznaczyć trajektorię pocisku:

$$y(x) = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

natomiast zasięg $y(x) = 0$.

$$x \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

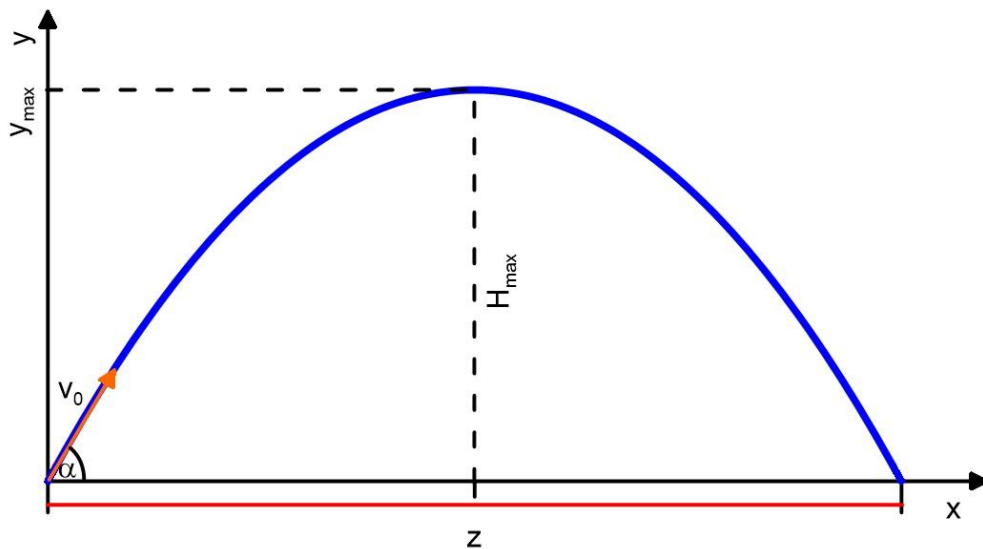
$$z = x = \frac{2v_0^2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Maksymalne wzniesienie można wyznaczyć z równania toru pocisku licząc jego ekstremum i przyrównując do zera

$$y(x) = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0,$$

$$x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$



Jak możemy zauważyć maksymalne wzniesienie występuje przy połowie zasięgu.

Zatem

$$y(x_m) = H_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \right)^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

co po prostych przekształceniach można sprowadzić do postaci

$$H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Zadanie 1.13 (rzut ukośny)

Pod jakim kątem należy skierować strumień wody, aby jego maksymalne wzniesienie było równe zasięgowi.

Korzystamy ze wzorów wyliczonych w poprzednim zadaniu na maksymalne wzniesienie i zasięg

$$H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

$$z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Przyrównajmy te dwie wielkości $H_{max} = z$

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Stąd

$$\sin^2 \alpha = 2 \sin 2\alpha,$$

$$\sin \alpha = 4 \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 4,$$

$$\alpha = 76^\circ.$$

Odp. Strumień wody należy skierować pod kątem $\alpha = 76^\circ$.

Zadanie 1.14 (ruch obrotowy)

Oblicz odpowiednie promienie R_1 i R_2 koła zamachowego, jeśli prędkość liniowa pasa napędzającego jest równa $v_1 = 6\text{m/s}$ natomiast prędkość pasa odbierającego przekaz mocy jest równa $v_2 = 5\text{m/s}$, wiedząc, że promień pierwszego koła jest o 15 cm większy od drugiego.

Dane:

$$v_1 = 6 \frac{m}{s},$$

$$v_2 = 5 \frac{m}{s},$$

$$l = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}.$$

Szukane:

$$R_1, R_2.$$

Prędkość liniową pasa transmisyjnego można zapisać

$$v = \omega R.$$

Zatem prędkość liniową pasa
napędzającego i odbierającego można
związać z prędkością kątową koła
zamachowego

$$\begin{cases} v_1 = \omega R_1 \\ v_2 = \omega R_2. \end{cases}$$

Dzieląc równania stronami

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

można zapisać

$$v_1 R_2 = v_2 R_1.$$

Uwzględniając

$$R_1 = R_2 + l$$

mamy

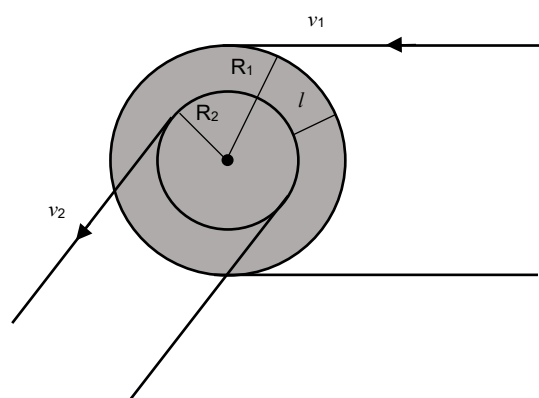
$$v_1 R_2 = v_2 (R_2 + l).$$

Stąd

$$R_2 = \frac{v_2 l}{v_1 - v_2}.$$

Podstawiając dane otrzymujemy:

$$R_1 = 26 \text{ cm}, R_2 = 11 \text{ cm}.$$



Zadanie 1.15 (ruch obrotowy)

Oblicz prędkość liniową v i przyspieszenie dośrodkowe a_d punktów powierzchni kuli Ziemskiej leżących na równiku oraz na szerokości geograficznej $\varphi = 60^\circ$.

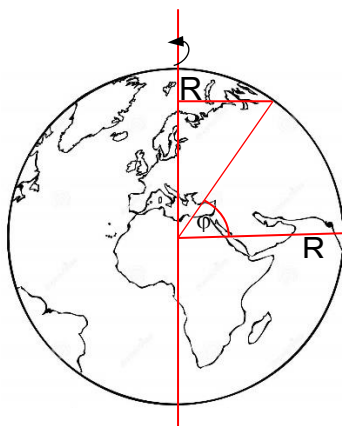
Dane:

$$R = 6370 \text{ km},$$

$$\varphi = 60^\circ.$$

Szukane:

$$v, a_d.$$



Prędkość liniowa Ziemi dana jest wzorem

$$v = \omega R,$$

zaś prędkość kątowna

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi}{T}.$$

Zważając, że Ziemia wykonuje jeden pełny obrót w ciągu doby

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi}{24h} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600s} = 7,3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}.$$

Wstawiając do pierwszego równania wyliczamy prędkość liniową na równiku

$$v = \omega R = 7,3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s} \cdot 63,7 \cdot 10^5 m = 465 \frac{m}{s} = 1674 \frac{km}{h}.$$

Przyspieszenie dośrodkowe wyrażone jest wzorem

$$a = \frac{v^2}{R} = 0,034 \frac{m}{s^2},$$

natomiast prędkość i przyspieszenie na szerokości geograficznej $\varphi = 60^\circ$ wynoszą odpowiednio

$$v = \omega R \cos \varphi,$$

$$a = \frac{\omega^2 R^2 \cos^2 \varphi}{R \cos \varphi} = \omega^2 R \cos \varphi.$$

Wstawiając wartości liczbowe otrzymujemy

$$v = 233 \frac{m}{s}, a = 0,017 \frac{m}{s^2}.$$

Zadanie 1.16 (ruch obrotowy)

Sztuczny satelita Ziemi krąży po orbicie, w przybliżeniu kołowej, odległej od powierzchni Ziemi średnio o 750 km, przy czym jego średni czas obiegu wynosi 99 min. Oblicz prędkość i przyspieszenie dośrodkowe satelity. Promień Ziemi $R = 6370 \text{ km}$.

Dane:

$$h = 750 \text{ km} = 7,5 \cdot 10^5 \text{ m},$$

$$R = 6370 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m},$$

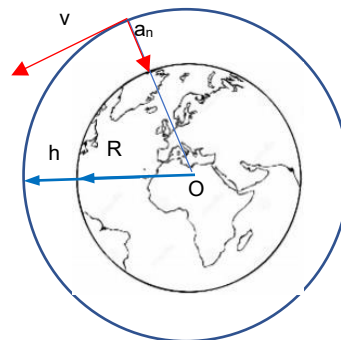
$$T = 99 \text{ min} = 5,94 \cdot 10^3 \text{ s}.$$

Szukane:

$$v, a_n.$$

Prędkość satelity obliczamy jako stosunek drogi $2\pi(R + h)$ jaką przebywa satelita przy pełnym obiegu wokół Ziemi, do czasu tego obiegu.

$$v = \frac{2\pi(R + h)}{T} = 7,5 \cdot 10^3 \frac{m}{s}.$$



Przyspieszenie dośrodkowe jakiego doznaje satelita jest równe

$$a_n = \frac{v^2}{R + h},$$

zatem

$$a_n = \frac{4\pi^2(R + h)^2}{T^2(R + h)} = \frac{4\pi^2(R + h)}{T^2} = 7,97 \frac{m}{s^2}.$$

Odp. Prędkość satelity na orbicie wynosi $7,5 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$, zaś jego przyspieszenie dośrodkowe jest równe $7,97 \frac{m}{s^2}$.

Dynamika

Zadanie 2.1 (siła)

Oblicz siłę poruszającą wagon, którego masa łącznie z ładunkiem wynosi 6 ton, jeżeli uzyskał on prędkość 90 km/h w czasie 50 s.

Dane:

$$m = 6\text{ T} = 6 \cdot 10^3 \text{ kg},$$

$$v = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25 \text{ m/s},$$

$$t = 50 \text{ s}.$$

Szukane:

$$F.$$

Siła z definicji to iloczyn masy i przyspieszenia

$$F = ma,$$

natomiast przyspieszenie jest dane wzorem

$$a = \frac{\Delta v}{t}.$$

Zatem

$$F = m \frac{\Delta v}{t}.$$

Podstawiając dane liczbowe uzyskujemy wartość siły $F = 3000 \text{ N}$.

Zadanie 2.2 (siła)

W czasie wyprowadzania z portu naładowanego statku zmierzono siłę, jaką napięta jest lina holownika, uzyskując wynik 8100 N. Wyznaczyć masę statku z ładunkiem, jeżeli w czasie 4 minut od chwili ruszenia przesunął się o 10 m.

Dane:

$$F = 8100 \text{ N},$$

$$t = 240 \text{ s},$$

$$s = 10 \text{ m}.$$

Szukane:

$$m.$$

Siła z definicji jest równa

$$F = ma,$$

natomiast przyspieszenie jest dane wzorem

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Stąd

$$F = m \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

oraz

$$F \Delta t = m \Delta v.$$

Prędkość i drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym można zapisać odpowiednio

$$v = at,$$

$$s = \frac{at^2}{2}.$$

Wyznaczając przyspieszenie z drugiego i wstawiając do pierwszego równania otrzymujemy

$$v = \frac{2s}{t}.$$

Zatem

$$Ft = m \frac{2s}{t}.$$

Stąd

$$m = \frac{Ft^2}{2s} = 2,33 \cdot 10^7 kg = 23,3 \text{ tys } ton.$$

Zadanie 2.3 (zasady dynamiki)

Na płaskim, gładkim podłożu znajduje się układ trzech ciał o masach $3m$, $2m$ i m połączonych nieważkimi nitkami tak jak na rysunku poniżej. Układ jest ciągnięty zewnętrzną siłą F . Znaleźć przyspieszenie układu i naprężenia nici łączących ciała.

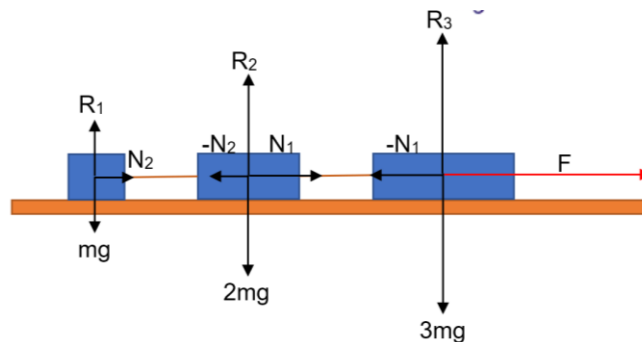
Dane:

m , $2m$, $3m$.

F .

Szukane:

a , N_1 , N_2 .



Reakcja podłoża R równoważy nacisk poszczególnych ciał tak, że siły działające w pionie równoważą się. Natomiast w poziomie w prawą stronę układ jest ciągnięty zewnętrzną siłą F , a oddziaływania są przenoszone przez nitki. Ciało o masie $3m$ działa na ciało o masie $2m$ siłą N_1 , a siła $-N_1$ jest siłą reakcji na to działanie. Podobnie jest z siłami N_2 i $-N_2$. Przyspieszenie układu i siły naciągu nitek N_1 i N_2 obliczamy stosując drugą zasadę dynamiki Newtona do każdego ciała indywidualnie

$$3ma = F - N_1,$$

$$2ma = N_1 - N_2,$$

$$ma = N_2.$$

Sumując równania stronami i przekształcając otrzymujemy

$$6ma = F.$$

Stąd przyspieszenie jest równe

$$a = \frac{F}{6m}.$$

Zwróćmy uwagę na addytywność mas. Taki sam wynik otrzymalibyśmy traktując ciała jak jedną masę. Doświadczenia potwierdzają zasadę addytywności masy: masa układu jest sumą mas poszczególnych ciał układu.

Natomiast naciągi nitek

$$N_1 = \frac{F}{2}, \quad N_2 = \frac{F}{6}.$$

Zadanie 2.4 (zasady dynamiki)

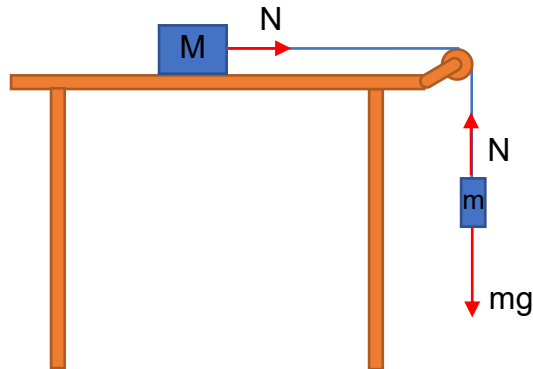
Dwa klocki o masach M i m są połączone nieważką nitką przerzuconą przez nieważki bloczek tak jak na rysunku poniżej. Oblicz przyspieszenie układu oraz naprężenie linki. Przyjmij, że klocek M porusza się po stole bez tarcia.

Dane:

$M, m.$

Szukane:

$a, N.$



Analogicznie jak w poprzednim zadaniu przyspieszenie układu i siły naciągu nitki N obliczamy zapisując drugą zasadę dynamiki Newtona do każdego ciała indywidualnie

$$ma = F - N,$$

$$Ma = N.$$

W przypadku ciała o masie m siła działająca na to ciało to siła ciężkości

$$F = mg.$$

Zatem

$$ma = mg - N,$$

$$Ma = N.$$

Dodając stronami równania otrzymujemy

$$mg = a(m + M),$$

stąd przyspieszenie układu jest równe

$$a = \frac{mg}{(m + M)},$$

zaś naprężenie nitki

$$N = \frac{Mmg}{(m + M)}.$$

Zadanie 2.5 (zasady dynamiki)

Oblicz o ile opadnie w dół wiszące poza stołem ciało o masie $2m$ (rysunek poniżej) w czasie $2s$, jeżeli pominiemy tarcie.

Dane:

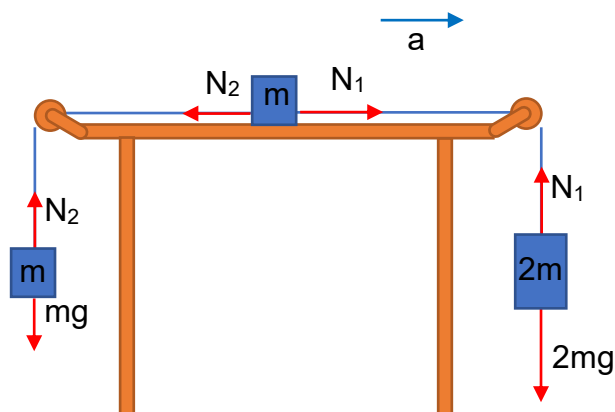
$$2m,$$

$$t = 2s,$$

$$g = 10 \frac{m}{s^2}.$$

Szukane:

$$s.$$



W zaprezentowanym układzie ciało leżące na stole będzie się przesuwać w prawą stronę. Zapiszmy równania opasujące siły działające na każdą z mas

$$2mg - N_1 = 2ma,$$

$$N_1 - N_2 = ma,$$

$$N_2 - mg = ma.$$

Gdy dodamy równania stronami otrzymujemy

$$mg = 4ma.$$

Stąd można wyznaczyć, że układ będzie poruszał się z przyspieszeniem

$$a = \frac{g}{4}.$$

Droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym jest dana wzorem

$$s = \frac{at^2}{2}.$$

Podstawiając za przyspieszenie $a = \frac{g}{4}$ otrzymujemy

$$s = \frac{gt^2}{8}.$$

Wstawiając wartości liczbowe

$$s = 5m.$$

Zadanie 2.6 (siła bezwładności)

Winda z pasażerem, którego masa wynosi 60 kg, porusza się pionowo w dół z przyspieszeniem $3,3 \text{ m/s}^2$. Oblicz nacisk pasażera na podłogę windy. Jaki byłby nacisk, gdyby winda poruszała się z takim samym przyspieszeniem do góry? Jakiego powinno być przyspieszenie, aby nacisk pasażera na podłogę windy był równy zero.

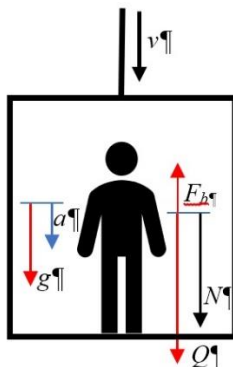
Dane:

$$m = 60 \text{ kg},$$

$$a = 3,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Szukane:

$$N,$$



Na pasażera znajdującego się w windzie poruszającej się w dół z przyspieszeniem a , czyli układzie nieinercyjnym, działają dwie siły: ciężar $Q = mg$ skierowany w dół oraz siła bezwładności skierowana przeciwnie niż przyspieszenie a , czyli również przeciwnie niż przyspieszenie ziemskie g o wartości równej $F_b = -ma$. Nacisk N , wywierany przez pasażera na podłogę windy jest równy geometrycznej sumie tych sił, ponieważ jednak działają one wzdłuż jednej prostej, możemy zapisać

$$N = Q + F_b = mg - ma,$$

czyli

$$N = m(g - a) = 390 \text{ N}.$$

Nacisk N wywierany przez pasażera na podłogę windy jest w tym przypadku mniejszy od jego ciężaru. Aby był on równy zero, musi być spełniony warunek

$$0 = m(-a_0),$$

czyli

$$a_0 = g.$$

Nacisk N wywierany przez pasażera na podłogę windy staje się równy zero wtedy, gdy winda, winda porusza się w dół z przyspieszeniem równym przyspieszeniu ziemskiemu g . Stan, w którym pasażer przestaje wywierać nacisk na podłogę windy, nazywa się stanem nieważkości.

W przypadku, gdy winda porusza się do góry z przyspieszeniem a nacisk pasażera na podłogę windy zwiększy się w stosunku do nieruchomej windy i wyniesie

$$N = m(g + a) = 787N.$$

Zadanie 2.7 (siła tarcia)

Znaleźć współczynnik tarcia kół samochodu o drogę, jeżeli wiadomo, że przy prędkości samochodu $v_0 = 10 \frac{m}{s}$ droga hamowania wynosi $s = 8m$.

Dane:

$$v_0 = 10 \frac{m}{s},$$

$$s = 8m,$$

$$g = 10 \frac{m}{s^2}.$$

Szukane:

$$f.$$

Drogę w ruchu jednostajni opóźnionym można zapisać wzorem

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2}.$$

Mając na uwadze, że prędkość w ruchu jednostajnie zmiennym jest równa $v_0 = at$ to

$$t = \frac{v_0}{a}.$$

Wstawiając t do powyższego równania na drogę otrzymujemy

$$s = \frac{v_0^2}{a} - \frac{a v_0^2}{2 a^2} = \frac{v_0^2}{2a}.$$

Przyspieszenie (opóźnienie) a samochodu można wyznaczyć ze wzoru

$$ma = T = m g f,$$

$$a = g f.$$

Wstawiając to do równania na drogę otrzymujemy

$$s = \frac{v_0^2}{2gf}$$

Wyznaczamy współczynnik tarcia

$$f = \frac{v_0^2}{2gs} = 0,625.$$

Zadanie 2.8 (równia pochyła)

Na gładkiej równi pochyłej, tworzącej z poziomem kąt $\alpha=30^\circ$ leży stalowy blok o ciężarze 1500N. Wyznacz siłę F , która działając w kierunku równi utrzyma blok w równowadze, oraz reakcję R jaką wywiera na niego równia.

Dane:

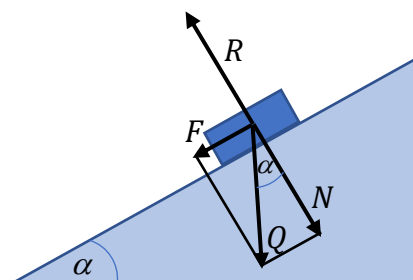
$$\alpha = 30^\circ,$$

$$Q = 1500N.$$

Szukane:

$$F, R.$$

Ciało znajdujące się na równi pochyłej, czyli na płaszczyźnie nachylonej do poziomu pod określonym kątem α nie może się poruszać w kierunku pionowym, w którym działa przyspieszenie ziemskie, a jedynie w kierunku równi. Rozkładając wektor siły ciężkości $Q = mg$ na kierunek równoległy i prostopadły do równi, otrzymujemy dwie siły: siłę $F = ma$ równoległą do równi oraz siłę normalną N , (siła nacisku) dociskającą ciało do powierzchni równi. Siła ta jest równoważona przez siłę reakcji podłoża R . Stąd też mamy jedyną niezrównoważoną siłę F powodującą ruch ciała wzdłuż równi z przyspieszeniem a .



$$F = mgsin\alpha$$

$$N = mgcos\alpha$$

Przyspieszenie ciała po równi będzie równe

$$ma = mgsin\alpha,$$

$$a = gsin\alpha.$$

Aby zrównoważyć siłę powodującą zsuwanie ciała należy zadziałać siłą równą co do wartości sile F w tym samym kierunku, lecz o przeciwnym zwrocie.

$$F = Qsin\alpha = 750N.$$

Siła reakcji podłoża

$$R = Qcos\alpha = 1300N.$$

Zadanie 2.9 (równia pochyła)

Na równi pochyłej zbudowanej z szyn i tworzącej z poziomem kąt 30° leży blok stalowy o ciężarze 1500 N . Wyznacz siłę, która działając wzdłuż równi utrzyma ciężar w równowadze, jeżeli współczynnik tarcia statycznego dla stali o stal wynosi $0,15$. Oblicz przyspieszenie z jakim blok poruszałby się, gdyby nie działała siła podtrzymująca. Oblicz wartość kąta nachylenia, przy którym blok nie będzie się zsuwał.

Dane:

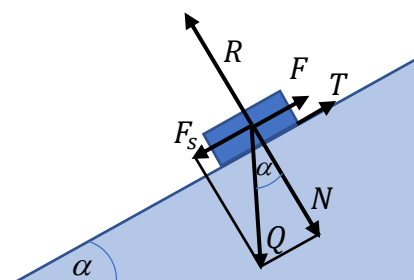
$$\alpha = 30^\circ,$$

$$Q = 1500N,$$

$$f = 0,15.$$

Szukane:

$$F, a, \alpha_0.$$



Na rysunku zaznaczono siły działające na stalowy blok na równi pochyłej:

- siła powodująca zsuwanie

$$F_s = Qsin\alpha,$$

- siła tarcia

$$T = fN = fQcos\alpha.$$

Aby klocek pozostawał w spoczynku

$$F = F_s - T,$$

stąd

$$F = Q \sin \alpha - f Q \cos \alpha,$$

$$F = Q (\sin \alpha - f \cos \alpha) = 460 \text{ N}.$$

Gdyby nie występowała siła podtrzymująca to przyspieszenie bloku na równi można zapisać

$$a = \frac{F}{m} = \frac{mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{m}.$$

$$a = g(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Wyznamy teraz maksymalny kąt przy jakim blok nie będzie się zsuwał. W tym przypadku siła powodująca zsuwanie i siła tarcia powinny być równe

$$F_s = T,$$

$$Q \sin \alpha = f Q \cos \alpha,$$

$$\sin \alpha = f \cos \alpha,$$

$$f = \tan \alpha = 0,15,$$

$$\alpha = 8,5^\circ.$$

Zadanie 2.10 (równia pochyła)

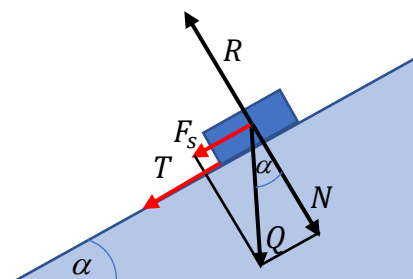
Jaką prędkość początkową v_0 trzeba nadać ciału o masie m , aby wjechało na szczyt równi o długości d i kącie nachylenia α jeżeli współczynnik tarcia wynosi f ? Oblicz czas t trwania ruchu. Przyspieszenie ziemskie g - dane.

Dane:

$d, \alpha, f.$

Szukane:

$t, v_0.$



Na ciało poruszające się po równi będą działały dwie niezrównoważone siły: siła F_s oraz siła tarcia T_s . Siła tarcia zawsze jest skierowana przeciwnie do kierunku ruchu. Zatem wypadkowa siła działająca na klocek będzie równa

$$ma = T + F_s,$$

$$ma = fmg\cos\alpha + mgsin\alpha.$$

Stąd przyspieszenie (opóźnienie) klocka

$$a = g(f\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Droga jaką ma do przebycia klocek – długość równi

$$L = v_0 t - \frac{at^2}{2}.$$

Mając na uwadze, że prędkość w ruchu jednostajnie zmiennym jest równa $v_0 = at$ to $t = \frac{v_0}{a}$.

Wstawiając to do powyższego równania otrzymujemy

$$L = \frac{v_0^2}{a} - \frac{a v_0^2}{2 a^2} = \frac{v_0^2}{2a},$$

stąd

$$v_0^2 = 2La = 2Lg(f\cos\alpha + \sin\alpha),$$

$$v_0 = \sqrt{2Lg(f\cos\alpha + \sin\alpha)}.$$

Zadanie to można również rozwiązać z zasady zachowania energii:

$$E_k = E_p + T.$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH + fmg\cos\alpha.$$

Długość równi można wyrazić poprzez jej wysokość

$$H = L\sin\alpha.$$

Zatem

$$\frac{v_0^2}{2} = gL\sin\alpha + fmg\cos\alpha.$$

Ostatecznie

$$v_0 = \sqrt{2Lg(f\cos\alpha + \sin\alpha)}.$$

Zadanie 2.11 (równia pochyła)

Jaką siłą należy ciągnąć poziomo klocek A, by klocek C wznosił się ze stałą prędkością? Wszystkie klocki mają jednakową masę m . Współczynnik tarcia klocków A oraz B o powierzchnię jest równy f , a kąt nachylenia równi do poziomu wynosi α . Błocki są nieruchome, tarcie na nich pomijamy.

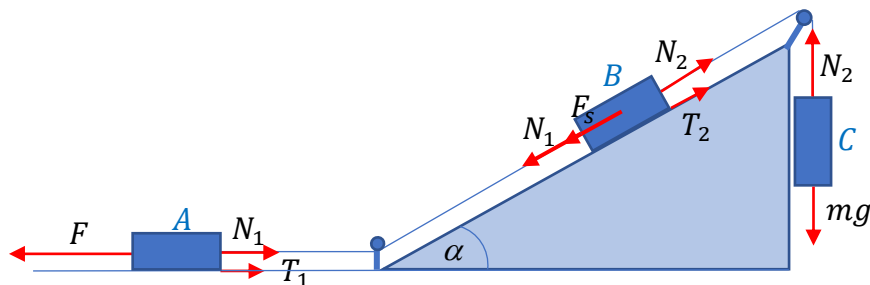
Dane:

m, α, f .

Szukane:

F .

Na poniższym rysunku zaznaczmy wszystkie siły jakie działają na poszczególne klocki



Aby klocek C wznosił się ze stałą prędkością to wszystkie klocki w układzie także muszą poruszać się ze stałą prędkością. Zatem przyspieszenie każdego klocka będzie równe zero.

Rozpiszmy siły jakie będą działać na każdy klocek

A: $F - T_1 - N_1 = ma = 0,$

B: $F_s + N_1 - T_2 - N_2 = 0,$

C: $N_2 - mg = 0.$

Dodajmy równania stronami

$$F - T_1 - N_1 + F_s + N_1 - T_2 - N_2 + N_2 - mg = 0.$$

Zatem

$$F = T_1 - F_s + T_2 + mg,$$

gdzie

$$T_1 = mgf,$$

$$T_1 = mgf \cos \alpha,$$

$$F_s = mgf \sin \alpha.$$

Zatem

$$F = mg(f - \sin \alpha + f \cos \alpha + 1).$$

Zadanie 2.12 (współczynnik tarcia)

Narciarz zjeżdża ze stałą prędkością v ze zbocza nachylonego pod kątem α do poziomu, a następnie jedzie aż do zatrzymania po poziomej płaszczyźnie. Przyjmując, że współczynnik tarcia nart o śnieg jest stały, wyznaczyć odległość jaką narciarz przebędzie po poziomym odcinku drogi.

Dane:

$v, \alpha.$

Szukane:

$s.$

Narciarz po płaskim odcinku porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym. Droga w takim ruchu jest równa:

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2}.$$

Mając na uwadze, że prędkość w ruchu jednostajnie zmiennym jest równa $v_0 = at$ to $t = \frac{v_0}{a}.$

Wstawiając to do powyższego równania otrzymujemy

$$s = \frac{v_0^2}{a} - \frac{a v_0^2}{2 a^2} = \frac{v_0^2}{2a}.$$

Na płaskim odcinku przyspieszenie (opóźnienie) a można wyznaczyć

$$ma = T = mgf.$$

$$a = gf.$$

Współczynnik tarcia zaś możemy wyznaczyć w sytuacji, gdy narciarz zjeżdża ze zbocza ze stałą prędkością. Wtedy

$$F_s = T,$$

$$mg \sin \alpha = mgf \cos \alpha.$$

Stąd

$$f = tg\alpha,$$

a droga pokonana przez narciarza na płaskim odcinku

$$s = \frac{v_0^2}{2gtg\alpha}.$$

Zadanie 2.13 (bloczki)

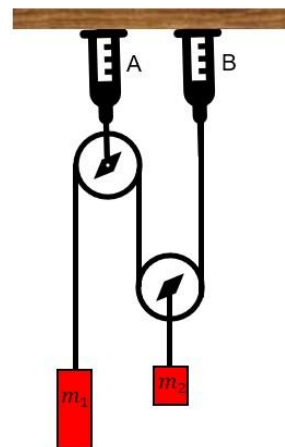
Oblicz wartości przyspieszeń a_1 i a_2 klocków o masach $m_1 = 2kg$ i $m_2 = 1kg$ w układzie przedstawionym na rysunku. Wyznaczyć wskazania dynamometrów A i B oraz całkowite obciążenie belki, na której zawieszony jest układ klocków. Przyjąć, że masy bloczków są znikome, a linki ślizgają się po bloczkach bez tarcia.

Dane:

m_1, m_2 .

Szukane:

N, P .



Zaznaczymy na rysunku siły jakie będą działały na poszczególne klocki oraz rozpiszmy siły jakie na nie działają. Zauważmy, że klocek m_2 będzie się przesuwiał w tym samym czasie o połowę długości przesunięcia pierwszego klocka. Zatem jego przyspieszenie będzie o połowę mniejsze.

$$m_1 a = m_1 g - N,$$

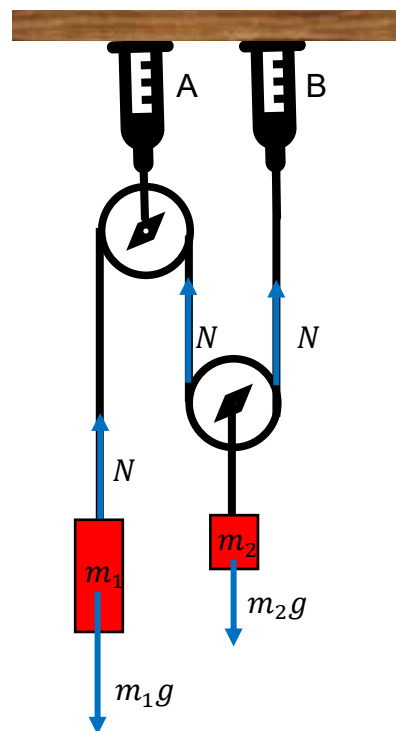
$$\frac{1}{2} m_2 a = 2N - m_2 g.$$

Jeśli pomnożymy obustronnie przez 2 pierwsze równanie i dodamy do siebie obydwa równania stronami to otrzymamy

$$a \left(2m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) = g(2m_1 - m_2).$$

Stąd przyspieszenie klocka o masie m_1 wyniesie

$$a = \frac{4m_1 - 2m_2}{4m_1 + 2m_2} g = \frac{m}{s^2},$$



zaś przyspieszenie klocka o masie m_2

$$a = \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + 2m_2} g = 3 \frac{m}{s^2}.$$

Wyznamy teraz naprężenie nici z drugiego równania

$$a = \frac{4N - 2m_2g}{m_2}.$$

Wstawiając to do pierwszego równania

$$\frac{4N - 2m_2g}{m_2} m_1 = m_1g - N$$

otrzymujemy

$$N = \frac{3m_1m_2}{4m_1 + m_2} g = 6, (6)N.$$

Zatem dynamometr B będzie wskazywał siłę $6, (6)N$ natomiast wskazania dynamometru A będą dwa razy większe.

Całkowite obciążenie belki będzie równe

$$P = \frac{9m_1m_2}{4m_1 + m_2} g = 20N.$$

Należy zwrócić uwagę na to, że obciążenie belki jest mniejsze niż ciężar obu klocków.

Zadanie 2.14 (siła dośrodkowa)

Samochód o masie m przejeżdża z prędkością v przez wypukły most o promieniu krzywizny R . Jaką siłą naciska samochód na most w jego najwyższym punkcie? Przy jakiej prędkości samochodu jego koła oderwą się od powierzchni mostu?

Dane:

$m, v, R.$

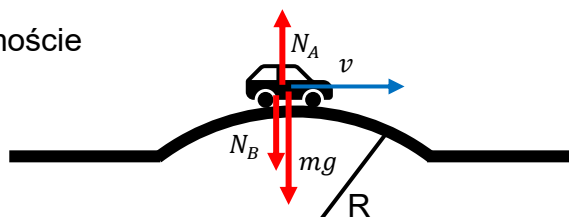
Szukane:

$N_B.$

Oznaczmy siły działające na samochód na moście

N_A – siła reakcji podłoża,

N_B – siła nacisku na most.



34



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.
Utwór dostępny jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe.

Zatem

$$mg - N_A = \frac{mv^2}{R}.$$

Stąd

$$N_A = mg - \frac{mv^2}{R}.$$

Siła reakcji podłoża jest równa sile nacisku na most

$$N_A = N_B.$$

Stąd

$$N_B = mg - \frac{mv^2}{R}.$$

Aby samochód mógł się oderwać od powierzchni, siła nacisku musi być równa 0.

$$mg - \frac{mv_{max}^2}{R} = 0.$$

Stąd

$$v_{max} = \sqrt{gR}.$$

Zadanie 2.15 (siła dośrodkowa)

Z jaką największą prędkością v może poruszać się wagon na zakręcie o promieniu R , aby nie wyskoczył z poziomo ułożonych szyn, środek ciężkości wagonu znajduje się na wysokości h nad torem, w którym szyny rozstawione są na odległość s

Dane:

$R, h, s.$

Szukane:

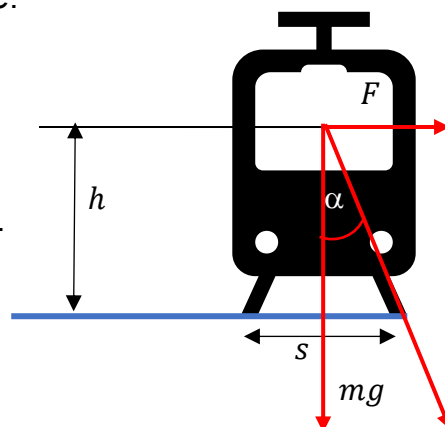
$v_{max}.$

Aby wagon się nie wykołował, kierunek siły wypadkowej nie może być skierowany poza tory.

Z rysunku widać, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{mg},$$

gdzie



$$F = \frac{mv^2}{R}.$$

Z podobieństwa trójkątów (cecha kkk) otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{2}s}{h}.$$

Porównując wyrażenia otrzymujemy

$$\frac{F}{mg} = \frac{s}{2h} = \frac{v^2}{Rg}.$$

Stąd maksymalna prędkość z jaką może poruszać się wagon na zakręcie o promieniu R wynosi

$$v = \sqrt{\frac{sgR}{h}}.$$

Zadanie 2.16 (siła dośrodkowa)

Kulka o masie m wisi na sznurku o długości l . Jaką prędkość v_0 należy nadać masie, aby osiągnęła położenie szczytowe (punkt B), Jaką prędkość v_1 należy nadać kulce zamontowanej na sztywnym nieważkim pręcie.

Dane:

$m, l.$

Szukane:

$v_0, v_1.$

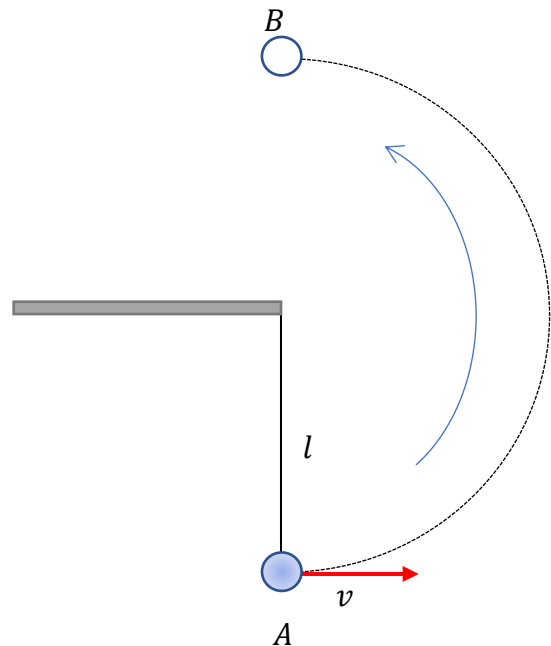
a) Rozpatrzmy przypadek nitki.

Gdy kulka przechodzi przez położenie szczytowe siła dośrodkowa musi być równa sile ciężkości

$$\frac{mv_B^2}{l} = mg,$$

czyli prędkość kulki w punkcie B powinna być równa

$$v_B^2 = gl.$$



Zatem energia kinetyczna kulki w najniższym położeniu (punkt A) musi być równa sumie energii kinetycznej i potencjalnej kulki w najwyższym położeniu.

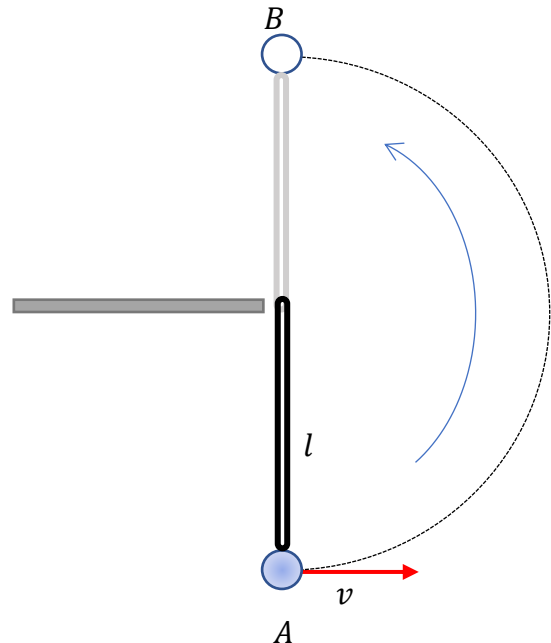
$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_B^2}{2} + mg2l.$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mgl}{2} + mg2l.$$

Stąd wyznaczamy v_0

$$v_0 = \sqrt{5gl}.$$

- b) Rozpatrzmy przypadek, gdy kulka jest na sztywnym pręcie



W tym przypadku, gdy kulka przechodzi przez położenie szczytowe siła dośrodkowa może być równa zero, gdyż sztywny pręt podtrzyma masę przeciw sile ciężkości. Zatem $v_B = 0$, a energia kinetyczna kulki w najniższym położeniu (punkt A) musi być równa energii potencjalnej kulki w najwyższym położeniu.

$$\frac{mv_1^2}{2} = 2mgl.$$

Stąd

$$v_1 = 2\sqrt{gl}.$$

Zatem $v_0 > v_1$.

Zadanie 2.17 (siła dośrodkowa)

Wózek o masie m zjeżdża bez tarcia po szynach o kształcie przedstawionym na rysunku.

- a) Z jakiej minimalnej wysokości H powinien zjechać samochodzik, aby w żadnym punkcie nie oderwał się od toru

b) Jaka siłą naciska samochodzik na tor w najwyższym punkcie pętli, gdy zjeżdża z wysokości $3r$.

Dane:

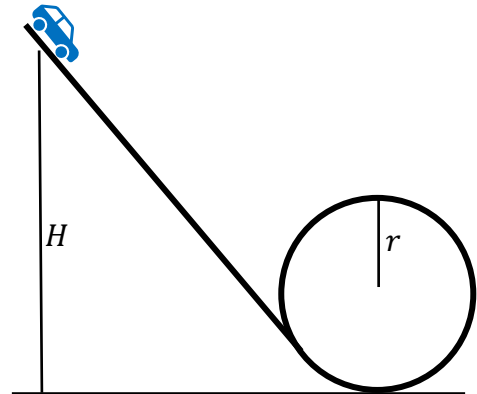
r .

Szukane:

H, N .

Energia potencjalna samochodzika w chwili początkowej powinna być wystarczająca, aby wznieść się na wysokość pętli oraz aby siła dośrodkowa utrzymała samochód przy torze. Gdy samochód znajduje się w położeniu szczytowym siła dośrodkowa musi być równa sile ciężkości.

$$\frac{mv_B^2}{r} = mg,$$



czyli prędkość samochodzika w punkcie B powinna być równa

$$v_B^2 = gr.$$

Zatem

$$mgH = \frac{mv_B^2}{2} + 2mgr.$$

$$mgH = \frac{mgr}{2} + 2mgr.$$

Aby samochodzik nie odpadł z toru powinien być puszczony z wysokości co najmniej

$$H = \frac{r}{2} + 2r = \frac{5}{2}r.$$

b)

Siłę nacisku N na szczycie pętli można zapisać

$$N = \frac{mv_B^2}{r} - mg,$$

natomiast zasada zachowania energii dla tego przypadku ma postać

$$3mgr = \frac{mv_B^2}{2} + 2mgr,$$

$$\frac{mv_B^2}{2} = mgr.$$

Przekształcając powyższy wzór otrzymujemy

$$\frac{mv_B^2}{r} = 2mg.$$

Wstawiając do równania $N = \frac{mv_B^2}{r} - mg$ otrzymujemy wartość siły nacisku

$$N = mg.$$

Zadanie 2.18 (praca)

Jaką pracę wykona silnik pociągu elektrycznego na drodze $s = 100m$, jeżeli pociąg pokonał tę drogę z przyspieszeniem $a = 1,5 \frac{m}{s^2}$? Pracę wyznacz dla przypadku, gdy pociąg jedzie po torze poziomym (a) oraz gdy jedzie po torze wznoszącym się pod kątem $\alpha = 30^\circ$ (b). Masa pociągu $m = 120 T$, efektywny współczynnik tarcia $f = 0,01$, przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

Dane:

$$s = 100m,$$

$$a = 1,5 \frac{m}{s^2},$$

$$\alpha = 30^\circ,$$

$$m = 120 T = 120000kg,$$

$$f = 0,01.$$

Szukane:

$$W.$$

Praca jest definiowana jako iloczyn siły i przesunięcia

$$W = F \cdot s.$$

a)

$$F = ma + T = m(a + gf).$$

Zatem praca silnika pociągu elektrycznego na płaskim odcinku torów jest równa

$$W = ms(a + gf).$$

$$W = 120000kg \cdot 100m \left(1,5 \frac{m}{s^2} + 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,01 \right) = 19,2 \cdot 10^6 \frac{kg \cdot m}{s^2} = 19,2MJ.$$

b)

$$F = ma + T + F_s = m(a + gfcos\alpha + gsina).$$

Zatem praca silnika pociągu elektrycznego po torze wznoszącym jest równa

$$W = ms(a + gfcos\alpha + gsina).$$

$$W = 120000kg \cdot 100m \left(1,5 \frac{m}{s^2} + 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,01 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 10 \frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{2} \right) = 79MJ.$$

Zadanie 2.19 (zasada zachowania energii)

Punkt materialny o masie m jest zawieszony na nieważkiej nici o długości $l = 1m$ przyczepionej jednym końcem do sufitu, tworząc wahadło matematyczne. Wahadło odchyłono od położenia równowagi o kąt $\theta = 30^\circ$, po czym puszczono swobodnie. Jaka jest prędkość v punktu w momencie, w którym przekracza ono najniższy punkt toru ruchu?

Dane:

$$l = 1m,$$

$$\theta = 30^\circ.$$

Szukane:

$$v.$$

Korzystając z zasady zachowania energii możemy zapisać

$$mgh = \frac{mv^2}{2}.$$

Energia potencjalna ciała w momencie wychylenia będzie równa energii kinetycznej w momencie przechodzenia przez najniższy punkt. W najniższym punkcie toru przyjmujemy, że energia potencjalna jest równa zero.

Stąd

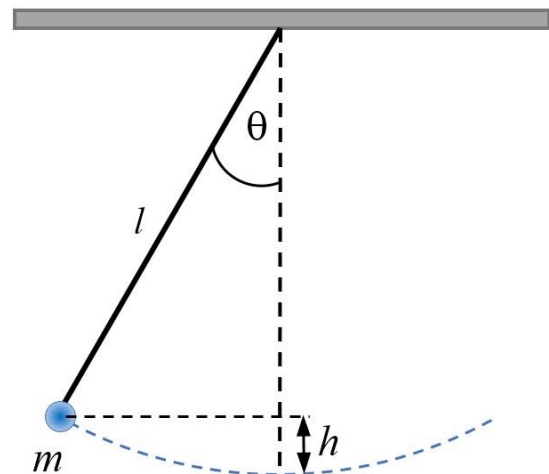
$$v = \sqrt{2gh}.$$

Wysokość h na jaką jest wzniesiona kulka w momencie odchylenia można wyznaczyć z zależności:

$$\cos\theta = \frac{x}{l},$$

gdzie x oznacza $x = l - h$.

Stąd możemy wyznaczyć h :



$$h = l(1 - \cos\theta),$$

a następnie wartość prędkości w momencie przechodzenia wahadła przez najniższe położenie.

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta)} = 1,62 \frac{m}{s}.$$

Zderzenia

Zadanie 3.1 (zderzenia sprężyste)

Dwie bile o masach, wynoszących 178 g leżą na stole bilardowym. Czerwona bila pozostaje w spoczynku, a białej bili nadano prędkość 0,5 m/s, tak by uderzyła ona centralnie w czerwona bilę. Po zderzeniu czerwona bila toczy się, także z prędkością 2,5 m/s. Jaka będzie prędkość białej bili?

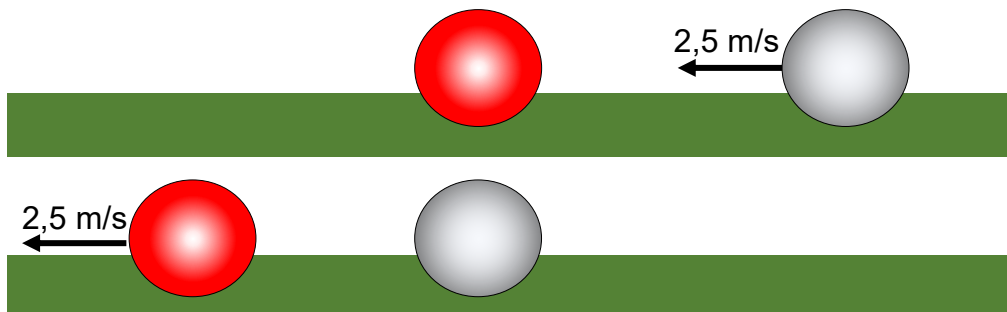
Dane:

$$m_1 = m_2 = m,$$

$$v_1 = v_2 = v.$$

Szukane:

u .



Rozważamy zderzenie dwóch ciał o znanych masach i prędkościach początkowych; ponadto znana jest prędkość jednego z nich po zderzeniu. Gładkość stołu zapewnia brak tarcia, siłę ciężkości równoważy siła reakcji podłoża.

Zapiszmy zasadę zachowania pędu dla tych ciał.

$$mv + 0 = mu + mv,$$

$$v = u + v,$$

$$u = 0.$$

Bile podczas zderzenia wymieniły się pędami. Biała bila przekazała cały pęd bili czerwonej. Jest to typowe dla zderzeń obiektów o jednakowych masach.

Zadanie 3.2 (zderzenia sprężyste)

Dwa krążki hokejowe, o masach 15 g i 12 g, położono na płaskim, gładkim lodzie. Czerwony krążek pozostaje w spoczynku, a czarnemu nadano prędkość 2,5 m/s skierowaną w lewo tak by uderzył on centralnie w krążek czerwony. Jeżeli zderzenie jest idealnie sprężyste, jakie będą prędkości krążków po zderzeniu?

Dane:

$$m_1 = 15g,$$

$$m_2 = 12g,$$

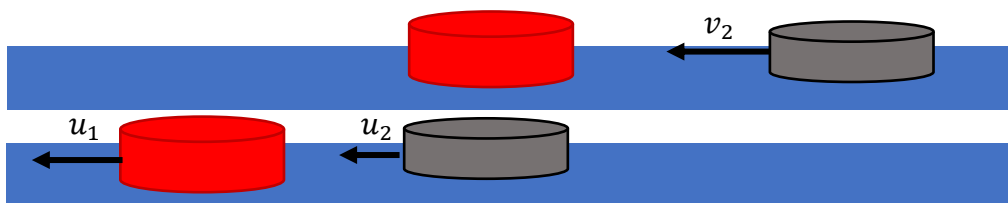
$$v_1 = 0 \frac{m}{s},$$

$$v_2 = 2,5 \frac{m}{s}.$$

Szukane:

$$u_1,$$

$$u_2.$$



Rozważamy zderzenie dwóch krążków o znanych masach i prędkościach początkowych, gdzie nieznane są prędkości obu krążków po zderzeniu. Gładkość lodu zapewnia brak tarcia, a siłę ciężkości równoważy siła reakcji podłoża – układ jest więc układem zamkniętym i spełniona jest w nim zasada zachowania pędu. Ponieważ mamy do czynienia ze zderzeniem idealnie sprężystym, energia kinetyczna w tym układzie także będzie zachowana. Otrzymujemy więc dwa równania z dwiema niewiadomymi:

- zasada zachowania pędu

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

- zasada zachowania energii

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Mimo, że prędkość początkowa krążka pierwszego jest równa zero, dla ogólności rozważań zachowajmy obecność tego członu w obu równaniach. W obu równaniach pogrupujmy wyrazy zawierające masę m_1 po lewej stronie, a z masą m_2 - po stronie prawej:

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2)$$

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2)$$

Jeżeli równanie drugie podzielimy przez pierwsze, to (po zastosowaniu wzoru na różnicę kwadratów) uzyskamy:

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2.$$

Z powyższego równania wyznaczamy jedną z niewiadomych i podstawiamy ją do równania pierwszego, opisującego zasadę zachowania pędu. Ostatecznie nowe prędkości krążków po zderzeniu to:

$$u_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1,$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2.$$

Podstawiając wartości liczbowe mamy $u_1 = 2,22 \frac{m}{s}$, $u_2 = -0,28 \frac{m}{s}$.

Pamiętajmy, że oś x układu współrzędnych zwrócona jest w lewo, więc prędkość krążka czerwonego u_1 jest dodatnia – zwrócona jest także w lewo. Krążek czarny, po odbiciu od cięższego krążka czerwonego porusza się w prawo, o czym świadczy znak minus przed jego prędkością u_1 .

W przypadku, gdyby masy krążków były takie same prędkości byłyby następujące:

$$u_1 = v_2,$$

$$u_2 = v_1.$$

Zatem pierwszy krążek przekazałby pęd drugiemu krążkowi. Pierwszy krążek zatrzymałby się, a drugi uzyskał prędkość pierwszego krążka.

Zadanie 3.3 (zasada zachowania pędu)

Ojciec (60kg) i córka (20kg) stoją na zamrożonej powierzchni stawu, gdzie nie ma tarcia. Ojciec rzuca 1kg piłkę z prędkością poziomą 5 m/s, a córka ją łapie. Jaka jest

prędkość ojca po rzuceniu piłki i jaka jest prędkość córki, gdy złapie piłkę. Jaka będzie prędkość córki, gdy piłka się od niej odbije i wróci do ojca z prędkością $4\frac{m}{s}$.

Dane:

$$m_o = 60kg,$$

$$m_c = 20kg,$$

$$m_p = 1kg,$$

$$v_p = 5\frac{m}{s}.$$

Szukane:

$$v_o, v_c.$$

Zapiszmy zasadę zachowania pędu dla ojca rzucającego piłkę do przodu. W chwili początkowej ojciec i piłka znajdują się w spoczynku. Po wyrzuceniu piłka leci do przodu, zaś ojciec doznaje odrzutu do tyłu.

$$0 = -m_o v_o + m_p v_p,$$

zatem

$$m_o v_o = m_p v_p.$$

Stąd

$$v_o = \frac{m_p v_p}{m_o} = 0,085\frac{m}{s}.$$

Córka natomiast łapie piłkę i razem z piłką porusza się do tyłu. Mamy tu do czynienia ze zderzeniem całkowicie niesprężystym

$$m_p v_p = (m_p + m_c) v_c,$$

stąd

$$v_c = \frac{m_p v_p}{(m_p + m_c)} = 0,238\frac{m}{s}.$$

W przypadku, gdy piłka odbija się od córki z zasady zachowania pędu otrzymujemy

$$m_p v_p = -m_p v_p + m_c v_c.$$

Stąd

$$v_c = \frac{2m_p v_p}{m_c} = 0,5\frac{m}{s}.$$

Zadanie 3.4 (zderzenia niesprężyste)

Proton o masie $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg zderza się z neutronem o masie nieznacznie większej¹ (z przyczyn praktycznych przyjmijmy, że takiej samej) i po ich złączeniu powstaje cząstka zwana deuteronem. Jaka jest prędkość deuteronu, jeżeli prędkość protonu wynosiła $7 \cdot 10^6$ m/s i skierowana była w prawo, a prędkość neutronu, równa $4 \cdot 10^6$ m/s – w lewo?

Dane:

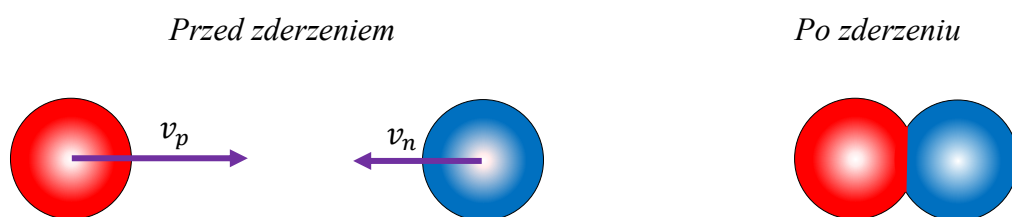
$$m_p = m_n = m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg},$$

$$v_p = 7 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_n = 4 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Szukane:

$$v_d.$$



Zapiszmy zasadę zachowania pędu, uwzględniając przeciwny zwrot wektora prędkości neutronu:

$$mv_p - mv_n = 2mv_d$$

Stąd prędkość deuteronu

$$v_d = \frac{v_p - v_n}{2}$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy

$$v_d = 1,5 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Opisana reakcja nosi nazwę reakcji fuzji jądrowej.

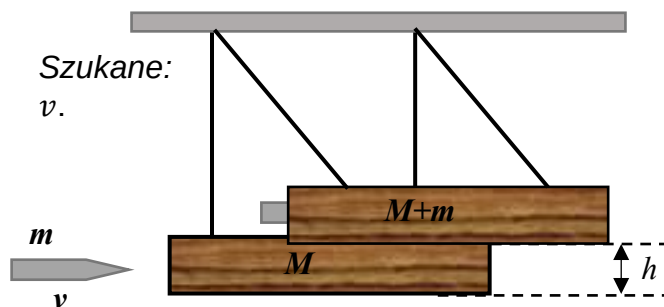
¹ Masa protonu wynosi $1,67262192 \cdot 10^{-27}$ kg, natomiast masa neutronu jest równa $1,67492721 \cdot 10^{-27}$ kg

Zadanie 3.5 (zderzenia niesprężyste)

Pocisk o masie m , mający prędkość poziomą v , wbija się w klocek o masie M i zatrzymuje w nim. Po zderzeniu wahadło tzn. klocek z tkwiącym w nim pociskiem wychyla się i podnosi na maksymalną wysokość h tak jak pokazano na rysunku poniżej. Oblicz prędkość pocisku.

Dane:

m, M, h .



Rozważamy teraz przypadek zderzenia całkowicie niesprężystego. Przy zderzeniach niesprężystych energia kinetyczna nie jest zachowana. Energia będąca różnicą pomiędzy początkową i końcową energią kinetyczną przechodzi w inne formy energii na przykład w ciepło lub energię potencjalną związaną z deformacją ciała podczas zderzenia. Tak jest w przypadku wahadła balistycznego, które służy do pomiaru prędkości pocisków. Składa się ono z bloku drewnianego, wiszącego na dwóch sznurach. Pocisk wbija się w klocek i zatrzymuje w nim. Po zderzeniu wahadło tzn. klocek z tkwiącym w nim pociskiem wychyla się i podnosi na maksymalną wysokość. Pęd przed zderzeniem jest równy pędowi pocisku, bo klocek jest nieruchomy. Natomiast po zderzeniu, klocek i pocisk poruszają się razem. Stosując zasadę zachowania pędu otrzymujemy

$$mv = (M + m)u,$$

gdzie u jest prędkością klocka z pociskiem bezpośrednio po zderzeniu.

W zderzeniu, część energii kinetycznej pocisku jest tracona min. na ciepło i odkształcenie klocka, w który pocisk się wbija. Pozostała część energii kinetycznej zamienia się po zderzeniu w energię potencjalną, co możemy zapisać w postaci równania

$$\frac{1}{2}(m + M)u^2 = (m + M)gh.$$

Wyznaczamy prędkość klocka

$$u = \sqrt{2gh}$$

i wstawiamy do pierwszego równania

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh}.$$

Wystarczy więc zmierzyć wysokość h oraz masy m i M aby móc wyznaczyć prędkość pocisku v .

Bryła sztywna

Zadanie 4.1 (energia ruchu obrotowego)

Obręcz o masie m toczy się po płaszczyźnie. Środek obręczy ma prędkość v . Jaka jest energia kinetyczna obręczy?

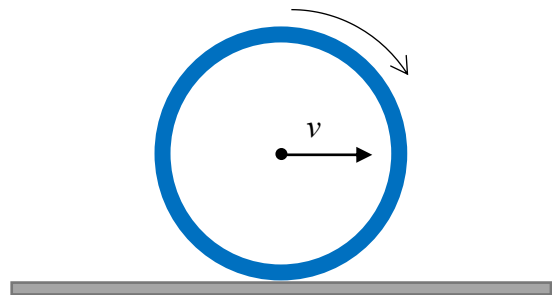
Dane:
 m, v .

Szukane:
 E_k .

W analizowanym przypadku energia kinetyczna obręczy jest sumą energii kinetycznej ruchu postępowego i ruchu obrotowego

$$E_k = E_{kp} + E_{ko}.$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$



Moment bezwładności obręczy jest równy

$$I = mR^2,$$

natomiast $\omega^2 = v/R$.

Zatem

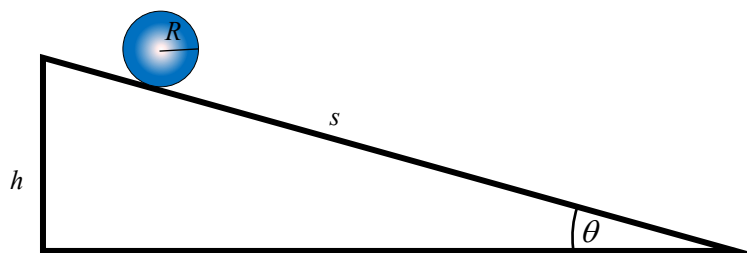
$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2.$$

Zadanie 4.2 (energia ruchu obrotowego)

Po równi pochyłej o kącie nachylenia θ stacza się krążek i kula o masie m i promieniu R . Jakie są ich przyspieszenia?

Dane:
 m, R, θ .

Szukane:
 $a_{krążka}, a_{kuli}$.



Gdy krążek i kula stoczą się z równi, ich energia potencjalna zostanie zamieniona na energię kinetyczną ruchu postępowego i obrotowego. Zatem

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Wstawiając do równania za prędkość kątową $\omega^2 = v^2/R^2$ otrzymujemy

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{Iv^2}{2R^2}.$$

Wyznamy z tego równania v^2 :

$$v^2 = \frac{2mgh}{m + I/R^2}.$$

Zarówno krążek jak i kula staczając się z równi będą poruszać się ruchem jednostajnie przyspieszonym. Kwadrat prędkości w takim ruchu jest równy $v^2 = 2as$ stąd

$$2as = \frac{2mgh}{m + I/R^2}.$$

Z rysunku widać, że

$$\frac{h}{s} = \sin \theta.$$

Zatem

$$a = \frac{mg}{m + I/R^2} \sin \theta.$$

Wstawiając momenty bezwładności:

- krążek $I = \frac{1}{2}mR^2$,
- kuli $I = \frac{2}{5}mR^2$,

uzyskujemy odpowiednio:

$$a_{\text{krążka}} = \frac{2}{3} g \cdot \sin \theta,$$

$$a_{\text{kuli}} = \frac{5}{7} g \cdot \sin \theta.$$

Należy zauważyć, że przyspieszenie brył nie zależy od masy ani od promienia. Przyspieszenie ciała, które nie wykonuje ruchu obrotowego a tylko się zsuwa z równi jest równe $a = g \sin \theta$.

Zadanie 4.3 (energia ruchu obrotowego)

Na błočku o promieniu R i momencie bezwładności I_0 jest nawinięta nić, na końcu której wisi ciało o masie m . Jaką prędkość kątową będzie miał błoček w chwili, gdy ciało opuści się na odległość h ?

Dane:
 R, I_0, m, h .

Szukane:
 ω .

Zapiszmy II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego (przesunięcie ciężarka o h).

$$mg - N = ma$$

Z drugiej strony zapiszmy II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego (kołowrotu)

$$NR = I_0 \varepsilon,$$

gdzie ε jest przyspieszeniem kątowym.

Z pierwszego równania wyznaczamy siłę naciągu nici

$$N = m(g - a),$$

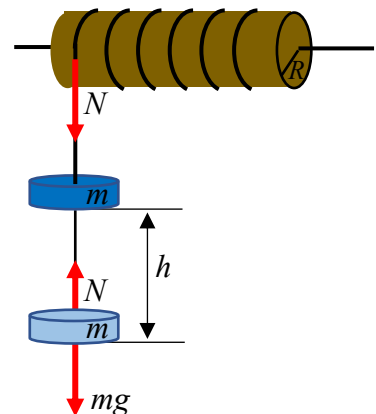
natomiast przyspieszenie opadającej masy da się wyrazić jako

$$a = \varepsilon R.$$

Wstawiając to do powyższego równania otrzymujemy

$$N = mg - m\varepsilon R,$$

a następnie do równania drugiego



$$mgR - m\epsilon R^2 = I_0 \epsilon.$$

Z tego ostatniego równania możemy wyznaczyć przyspieszenie kątowe ϵ

$$\epsilon = \frac{mgR}{I_0 + mR^2}.$$

Korzystając ze wzorów dla ruchu obrotowego jednostajnie przyspieszonego

$$\alpha(t) = \frac{\epsilon t^2}{2},$$

$$\omega(t) = \epsilon t$$

możemy znaleźć zależność prędkości kątowej od przyspieszenia kątowego

$$\omega = \sqrt{2\alpha\epsilon}.$$

Zauważmy, że po przebyciu drogi h przez masę m bloczek obróci się o kąt α

$$\alpha = \frac{h}{R}.$$

Zatem prędkość kątowa kołowrotu

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{I_0 + mR^2}}.$$

Ruch harmoniczny

Zadanie 5.1 (prędkość i przyspieszenie w ruchu harmonicznym)

Równanie ruchu punktu dane jest w postaci: $x(t) = A \cos(\pi t / \tau)$ gdzie amplituda wynosi 5 cm zaś $\tau = 6s$.

- Podać okres drgań ciała.
- Wyznaczyć chwile t_v i t_a , w których występuje maksymalna prędkość i maksymalne przyspieszenie.
- Wyznaczyć wartości prędkości i przyspieszenia w tych momentach.

Dane:

$$x(t),$$

$$A = 5cm,$$

$$\tau = 6s.$$

Szukane:

$$T, t_v, t_a, v_t, a_t.$$

Równanie ruchu harmonicznego opisane jest ogólnym równaniem

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Porównując to równanie z podanym równaniem w zadaniu

$$x(t) = A \cos(\pi t / \tau)$$

możemy zauważyć, że

$$\varphi = 0.$$

$$\omega = \frac{\pi}{\tau} = \frac{\pi}{6} \frac{1}{s}.$$

Okres drgań jest dany wzorem

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

zatem

$$T = 2\pi \frac{\tau}{\pi} = 2\tau = 12s.$$

Zależność prędkości od czasu opisane jest ogólnym równaniem

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

Zatem wartość maksymalna prędkości jest równa

$$v_{max} = A\omega$$

Wtedy, gdy $\sin(\omega t) = \pm 1$, czyli dla

$$\omega t = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Stąd

$$t = \frac{\pi}{\omega} \left(k + \frac{1}{2} \right).$$

Policzmy kolejne momenty, w których występuje maksymalna prędkość:

$$t_0 = \frac{6s\pi}{\pi} \frac{1}{2} = 3s,$$

$$t_1 = \frac{6s\pi}{\pi} \frac{3}{2} = 9s,$$

$$t_n = (3 + 6n)s.$$

Maksymalną prędkość wyznaczmy dla chwili $t = 3s$ oraz dla chwili $t = 9s$.

$$v(t = 3s) = -5cm \frac{\pi}{6s} \sin\left(\frac{\pi}{6s} 3s\right) = -\frac{5\pi cm}{6s} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5\pi cm}{6s}.$$

$$v(t = 9s) = \frac{5\pi cm}{6s}.$$

Analogicznie policzmy maksymalną wartość przyspieszenia. Zależność przyspieszenia od czasu opisana jest ogólnym równaniem

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Zatem wartość maksymalna przyspieszenia

$$a_{max} = A\omega^2,$$

wtedy, gdy $\cos(\omega t) = \pm 1$, czyli dla

$$\omega t = 0 + k\pi.$$

Stąd

$$t = \frac{k\pi}{\omega}.$$

Policzmy kolejne momenty, w których występuje maksymalne przyspieszenie:

$$t_0 = 0s,$$

$$t_1 = \frac{6s\pi}{\pi} = 6s,$$

$$t_n = (6n)s.$$

Maksymalne przyspieszenie wyznaczmy dla chwili $t = 0s$ oraz $t = 6s$.

$$a(t = 0s) = -5cm \left(\frac{\pi}{6s}\right)^2 \cos(0) = -\frac{5\pi^2 cm}{36 s^2} = -\frac{5\pi}{6} = -1,37 \frac{cm}{s^2}.$$

$$v(t = 6s) = \frac{5\pi}{6} = 1,37 \frac{cm}{s^2}.$$

Zadanie 5.2 (Energia oscylatora harmonicznego)

Obliczmy jaki jest stosunek energii potencjalnej do energii kinetycznej ciała wykonującego drgania harmoniczne, gdy znajduje się ono w połowie drogi między położeniem początkowym, a położeniem równowagi.

Dane:
 $x = \frac{1}{2} A.$

Szukane:
 $E_p/E_k.$

Dla danego wychylenia ciała $x = \frac{A}{2}$ możemy wyliczyć energię potencjalną ciała.

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k \cdot \left(\frac{1}{2} A\right)^2 = \frac{1}{8} kA^2.$$

Energia układu drgającego jest sumą energii potencjalnej i kinetycznej:

$$E_c = E_p + E_k,$$

stąd

$$E_k = E_c - E_p,$$

zatem

$$E_k = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{8}kA^2,$$

$$E_k = \frac{3}{8}kA^2.$$

Zatem

$$\frac{E_p}{E_k} = \frac{\frac{1}{8}kA^2}{\frac{3}{8}kA^2} = \frac{1}{3}.$$

Zadanie 5.3 (Energia oscylatora harmonicznego)

Sprężyna wydłuża się pod wpływem siły $F_0 = 9,8N$ o $x_0 = 0,1m$. Do sprężyny został podwieszony ciężarek o masie $m = 2kg$ i wprowadzony w drgania z amplitudą $A = 0,2m$

- Ile wynosi okres tych drgań?
- Ile wynosi całkowita energia drgań?
- Ile wynosi maksymalna prędkość ciężarka?

Dane:

$$F_0 = 9,8N,$$

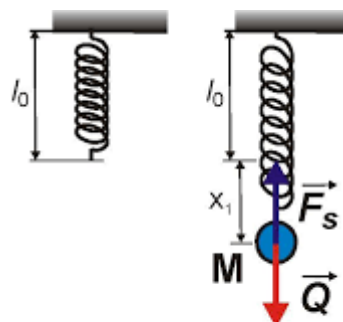
$$x_0 = 0,1m,$$

$$m = 2kg,$$

$$A = 0,2m.$$

Szukane:

$$T, E_c, v_{max}.$$



Okres drgań wahadła sprężynowego jest dany

wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

zaś siła sprężystości jest postaci

$$F = -kx_0.$$

Możemy zatem wyznaczyć współczynnik sprężystości sprężyny

$$k = \left| \frac{F_0}{x} \right| = \frac{9,8N}{0,1m} = 98 \frac{N}{m}.$$

Wstawiając wartość k do pierwszego równania możemy wyznaczyć okres drgań wahadła

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 6,28 \sqrt{\frac{2 \frac{kg}{98 \frac{N}{m}}}{1}} = 0,889s.$$

Energia całkowita wahadła jest dana wzorem:

$$E_c = \frac{kA^2}{2}.$$

Zatem

$$E_c = 1,96 J.$$

Prędkość maksymalna masy zawieszonych na wahadle sprężynowym jest równa

$$v_{max} = A\omega,$$

gdzie

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Wstawiając wzór na ω do wzoru na v_{max} otrzymujemy

$$v_{max} = A \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,2m \sqrt{\frac{89 \frac{N}{m}}{2kg}} = 1,4 \frac{m}{s}.$$