

# **MATERIAŁY DYDAKTYCZNE**

do zajęć wyrównawczych z przedmiotu:

## **Matematyka**

dla studentów kierunku

## **Inżynieria logistyki**

**Opracował zespół w składzie:**

**dr Piotr Oleszczuk**

**Lublin 2025 r.**



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.  
Utwór dostępny jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe.

# Funkcje elementarne. Równania i nierówności

## Wartość bezwzględna

### Zadanie

Znaleźć rozwiązanie nierówności

$$|x + 3| + |x - 2| \leq |x + 1| + 1.$$

### Rozwiązanie

Aby rozwiązać nierówność należy odpowiednio wyznaczyć wartości bezwzględne występujące w równaniu w zależności od znaku wyrażenia wewnątrz każdego składnika z wartością bezwzględną. Przypomnijmy, że wartość bezwzględna z liczby nieujemnej jest tą samą liczbą, czyli gdy  $a \geq 0$  to

$$|a| = a,$$

zaś wartość bezwzględna z liczby ujemnej jest liczbą przeciwną, czyli jeśli  $a < 0$ , to

$$|a| = -a.$$

Mamy więc: - gdy  $x + 3 \geq 0$ , co jest równoważne  $x \geq -3$ , to

$$|x + 3| = x + 3,$$

zaś  $x + 3 < 0$ , co jest równoważne  $x < -3$ , to

$$|x + 3| = -(x + 3) = -x - 3.$$

gdy  $x - 2 \geq 0$ , co jest równoważne  $x \geq 2$ , to

$$|x - 2| = x - 2,$$

zaś  $x - 2 < 0$ , co jest równoważne  $x < 2$ , to

$$|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2.$$

gdy  $x + 1 \geq 0$ , co jest równoważne  $x \geq -1$ , to

$$|x + 1| = x + 1,$$

zaś  $x + 1 < 0$ , co jest równoważne  $x < -1$ , to

$$|x + 1| = -(x + 1) = -x - 1.$$

Miejsca zerowe wyrażeń  $x + 3$ ,  $x - 2$  i  $x + 1$ , czyli punkty  $-3, 2, -1$  dzielą całą oś rzeczywistą na przedziały:  $(-\infty, -3)$ ,  $[-3, -1)$ ,  $[-1, 2)$  i  $[2, +\infty)$ , w których każde z powyższych wyrażeń ma stały znak. Rozwiązujemy dane równanie w każdym z wymienionych przedziałów.

- Niech  $x \in (-\infty, -3)$ . Wtedy równanie przybiera postać

$$-(x+3) - (x-2) \leq -(x+1) + 1$$

Mamy dalej

$$-x - 3 - x + 2 \leq -x - 1 + 1$$

$$-2x - 1 \leq -x$$

$$-2x - 1 + x \leq 0$$

$$-x - 1 \leq 0$$

$$-x \leq 1$$

$$x \geq -1$$

Ostatecznie

$$x \in [-1, +\infty) \cap (-\infty, -3) = \emptyset.$$

Zatem w tym przypadku  $x \in \emptyset$ .

- Niech  $x \in [-3, -1)$ . Równanie wtedy przybiera postać

$$x + 3 - (x - 2) \leq -(x + 1) + 1$$

Mamy

$$x + 3 - x + 2 \leq -x - 1 + 1$$

$$5 \leq -x$$

$$x \leq -5.$$

Ostatecznie

$$x \in [-3, -1) \cap (-\infty, -5] = [-1, 1) = \emptyset.$$

Zatem w tym przypadku również  $x \in \emptyset$ .

Niech  $x \in [-1, 2)$ . Wówczas mamy

$$x + 3 - (x - 2) \leq x + 1 + 1$$

$$x + 3 - x + 2 \leq x + 2$$

$$5 \leq x + 2$$

$$5 - 2 \leq x$$

$$x \geq 3.$$

Ostatecznie

$$x \in [3, +\infty) \cap [-1, 2) = \emptyset.$$

Zatem w tym przypadku również  $x \in \emptyset$ .

- Niech  $x \in [2, +\infty)$ . Wówczas równanie przybiera postać

$$x + 2 + x - 2 \leq x + 1 + 1$$

Mamy dalej

$$2x \leq x + 2$$

$$2x - x \leq 2$$

$$x \leq 2$$

Ostatecznie

$$x \in (-\infty, 2] \cap [2, +\infty) = \{2\}.$$

Rozwiązaniem końcowym nierówności jest suma rozwiązań otrzymanych w każdym z przypadków cząstkowych, czyli

$$x \in \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \{2\} = \{2\},$$

czyli równanie posiada tylko jedno rozwiązanie  $x = 2$ .

## Równania i nierówności wymierne

### Zadanie

Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{x+2}{x+1} - \frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{2x+1}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}.$$

### Rozwiązanie

Dziedzina równania: zakładamy, że wszystkie mianowniki są różne od zera

$$x-1 \neq 0, x+1 \neq 0, (x-1)(x+1) \neq 0.$$

Czyli dziedziną równania jest zbiór  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ . Mamy

$$\frac{x+2}{x+1} - \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x+1}{-(x-1)} - \frac{1-x}{x+1}$$

Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika

$$\begin{aligned} \frac{(x+2)(x-1) - (2x+1)}{(x+1)(x-1)} &= \frac{-(2x+1)}{x-1} - \frac{1-x}{1+x} \\ \frac{x^2 - x + 2x - 2 - 2x - 1}{(x-1)(x+1)} &= \frac{-(2x+1)(x+1) - (1-x)(x-1)}{(x-1)(1+x)} \\ \frac{x^2 - x - 3}{(x-1)(x+1)} &= \frac{-(2x^2 + 2x + x + 1) + (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \\ \frac{x^2 - x - 3}{(x-1)(x+1)} &= \frac{-(2x^2 + 3x + 1) + x^2 - 2x + 1}{(x-1)(x+1)} \\ \frac{x^2 - x - 3}{(x-1)(x+1)} &= \frac{-2x^2 - 3x - 1 + x^2 - 2x + 1}{(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

$$\frac{x^2 - x - 3}{(x-1)(x+1)} = \frac{-x^2 - 5x}{(x-1)(x+1)}.$$

Porównujemy liczniki ułamków

$$x^2 - x - 3 = -x^2 - 5x$$

Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę równania:

$$x^2 - x - 3 + x^2 + 5x = 0$$

$$2x^2 + 4x - 3 = 0.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 16 + 24 = 40 > 0.$$

Zatem powyższe równanie ma dwa rozwiązania

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{40}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 - \sqrt{4 \cdot 10}}{4} = \frac{-4 - \sqrt{4} \cdot \sqrt{10}}{4} = \frac{-4 - 2 \cdot \sqrt{10}}{4} = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2},$$

oraz

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{40}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 + \sqrt{4 \cdot 10}}{4} = \frac{-4 + \sqrt{4} \cdot \sqrt{10}}{4} = \frac{-4 + 2 \cdot \sqrt{10}}{4} = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2},$$

Ponieważ  $x_1 \notin \{-1, 1\}$  i  $x_2 \notin \{-1, 1\}$  więc są to rozwiązania tego równania.

### Zadanie

Wyznaczyć rozwiązanie nierówności

$$\frac{x+2}{x+1} - \frac{2x+1}{x^2-1} \geq \frac{2x+1}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}.$$

### Rozwiązanie

Powyższa nierówność powstała przez zmianę znaku równości w równaniu z poprzedniego zadania. Podobnie jak w przypadku równania, zakładamy, że wszystkie mianowniki są różne od zera

$$x-1 \neq 0, x+1 \neq 0, (x-1)(x+1) \neq 0.$$

Czyli dziedziną nierówności jest zbiór  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ . Z poprzedniego zadania wiemy, że po sprowadzeniu do wspólnego mianownika ułamków znajdujących się po obu stronach nierówności otrzymujemy

$$\frac{x^2 - x - 3}{(x-1)(x+1)} \geq \frac{-x^2 - 5x}{(x-1)(x+1)}.$$

Stąd

$$\frac{x^2 - x - 3}{(x-1)(x+1)} - \frac{-x^2 - 5x}{(x-1)(x+1)} \geq 0,$$

$$\frac{x^2 - x - 3 - (-x^2 - 5x)}{(x-1)(x+1)} \geq 0,$$

$$\frac{x^2 - x - 3 + x^2 + 5x}{(x-1)(x+1)} \geq 0,$$

$$\frac{2x^2 + 4x - 3}{(x-1)(x+1)} \geq 0.$$

Mnożąc obie strony nierówności przez kwadrat mianownika, czyli przez wielomian  $(x-1)^2(x+1)^2$ , co jest liczbą dodatnią dla dowolnego  $x$  z dziedziny nierówności, otrzymujemy

$$(2x^2 + 4x - 3)(x-1)(x+1) \geq 0.$$

Z poprzedniego zadania wiemy że pierwiastkami wielomianu  $2x^2 + 4x - 3$  są liczby

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2} \approx -2,58; \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} \approx 0,58.$$

Stąd

$$2x^2 + 4x - 3 = 2(x - x_1)(x - x_2).$$

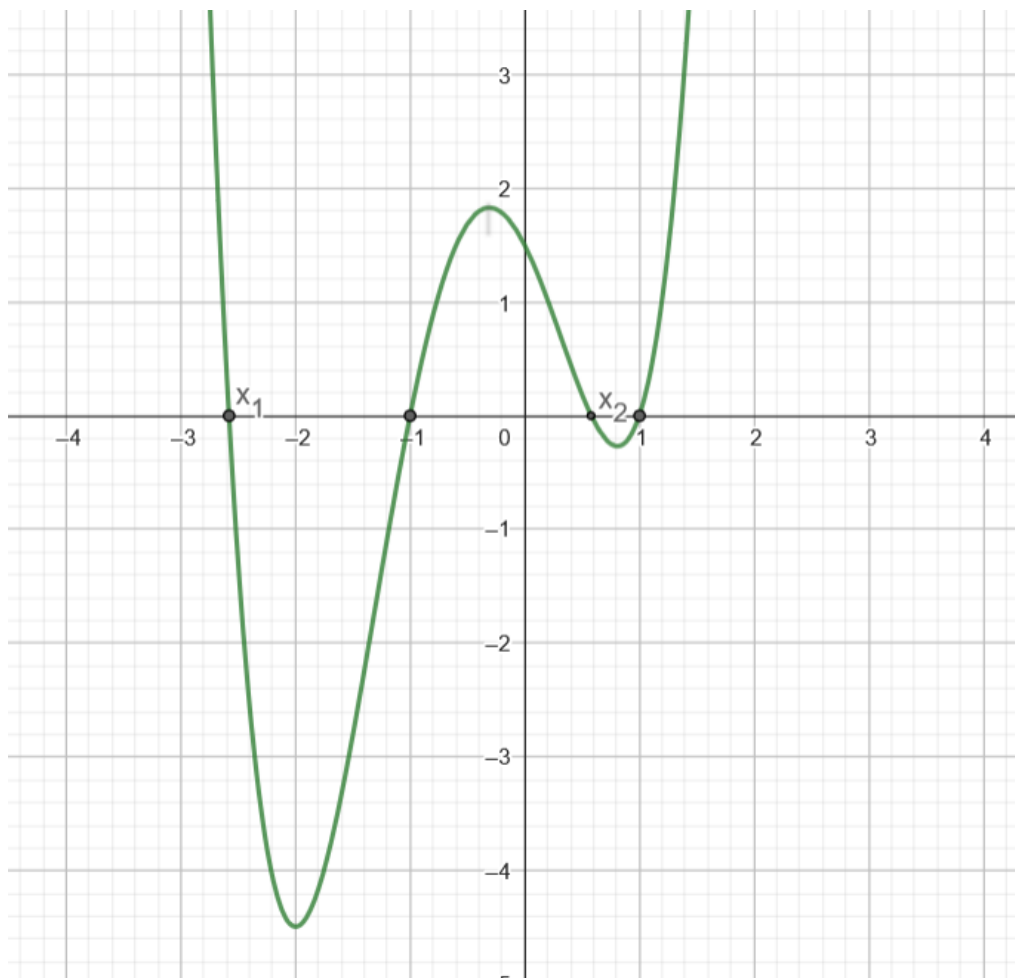
Nierówność przybiera więc postać

$$2(x - x_1)(x - x_2)(x - 1)(x + 1) \geq 0,$$

I po podzieleniu obu stron nierówności przez 2 otrzymujemy ostatecznie

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - 1)(x + 1) \geq 0$$

Powyższą nierówność rozwiązujemy graficznie. Zauważmy, że po wymnożeniu lewej strony otrzymujemy, że współczynnik przy  $x^4$  wynosi 1 i jest liczbą dodatnią. Dlatego wykres w  $+\infty$  "startuje" powyżej osi (wielomian stanowiący lewą stronę nierówności ma w  $+\infty$  granicę wynoszącą  $+\infty$ ) i "przechodzi" przez miejsca zerowe powyższego wielomianu (tzn.  $x_1, x_2, 1, -1$ ) ponieważ każdy czynnik (nawias) jest podniesiony do potęgi pierwszej czyli nieparzystej (w przypadku parzystego wykładnika przy czynniku, wykres "dochodzi" do miejsca zerowego dopowiadającego temu czynnikowi i nie przechodzi na drugą stronę - w rozważanej nierówności ten przypadek nie zachodzi). Poniższy rysunek przedstawia szkic wykresu lewej strony nierówności.



Przybliżony wykres lewej strony nierówności.

Rozwiązaniem nierówności, po uwzględnieniu dziedziny tzn.  $x \neq -1$  i  $x \neq 1$ , jest

$$x \in (-\infty, x_1] \cup (-1, x_2] \cup (1, +\infty).$$

## Nierówności wykładnicze

### Zadanie

Rozwiąż nierówność

$$\frac{1}{3^x - 1} \leq \frac{1}{3^{x+1} + 2}.$$

### Rozwiązanie

Wyznaczamy dziedzinę równania: zakładamy, że mianowniki są różne od zera, czyli

$$3^x - 1 \neq 0,$$

oraz

$$3^{x+1} + 2 \neq 0.$$

Pierwszy warunek jest równoważny

$$3^x \neq 3^0$$

co oznacza, że  $x \neq 0$ . Drugi warunek oznacza, że

$$3^{x+1} \neq -2,$$

i jest on spełniony dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$  ponieważ liczba  $3^{x+1}$  jest dodatnia dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ . Zatem nierówność jest określona dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Mamy

$$\frac{1}{3^x - 1} \leq \frac{1}{3^x \cdot 3 + 2}.$$

Wprowadźmy oznaczenie  $t = 3^x$ . Oczywiście  $t > 0$  i  $t \neq 1$  gdy  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Wówczas równanie przybiera postać

$$\frac{1}{t - 1} \leq \frac{1}{3t + 2}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{3t + 2} &\leq 0 \\ \frac{3t + 2}{(t - 1)(3t + 2)} - \frac{t - 1}{(t - 1)(3t + 2)} &\leq 0 \\ \frac{3t + 2 - (t - 1)}{(t - 1)(3t + 2)} &\leq 0 \\ \frac{3t + 2 - t + 1}{(t - 1)(3t + 2)} &\leq 0 \\ \frac{2t + 3}{(t - 1)(3t + 2)} &\leq 0. \end{aligned}$$

Mnożąc obie strony nierówności przez kwadrat mianownika, czyli przez

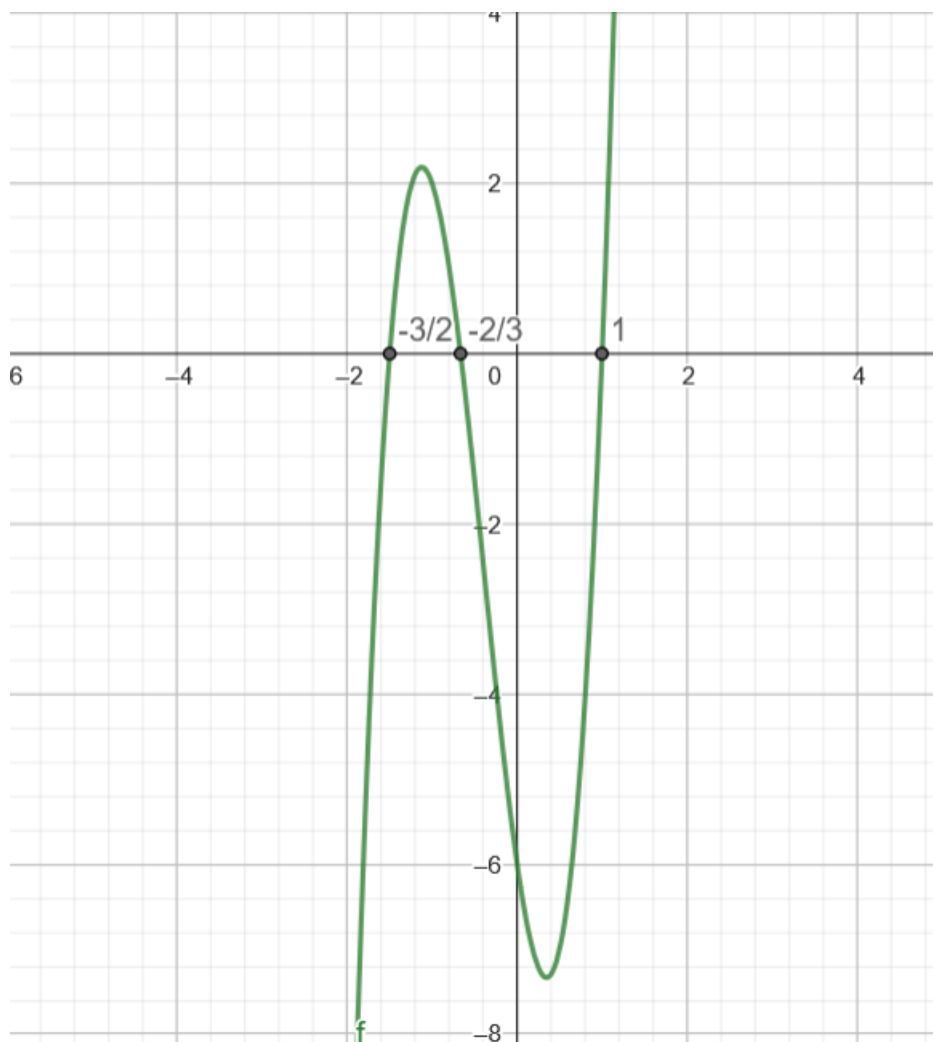
$$(t - 1)^2(3t + 2)^2,$$

co jest wyrażeniem dodatnim dla dowolnego  $t > 0$  takiego, że  $t \neq 1$  (jest to liczba różna od zera podniesiona do kwadratu), otrzymujemy nierówność

$$(2t + 3)(t - 1)(3t + 2) \leq 0,$$

którą rozwiązanie wyznaczamy graficznie, szkicując wykres wielomianu po lewej stronie. Miejsca zerowe każdego z jego czynników to odpowiednio  $-\frac{3}{2}$ ,  $1$ ,  $-\frac{2}{3}$ . Ponieważ współczynnik przy  $t^3$  wspomnianego wielomianu jest dodatni, więc szkicowanie wykresu rozpoczynamy powyżej osi w  $+\infty$ , i przechodzimy przez wszystkie miejsca zerowe (każdy z czynników jest podniesiony do pierwszej czyli

nieparzystej potęgi). Poniższy rysunek przedstawia szkic wykresu tego wielomianu.



Zatem rozwiązanie nierówności to

$$t \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [-\frac{2}{3}, 1].$$

Przypomnijmy, że dziedziną nierówności jest

$$t \in (0, +\infty) \setminus \{1\}.$$

Zatem ostatecznie

$$t \in (0, 1),$$

czyli  $0 < t < 1$ . Ponieważ  $t = 3^x$  zatem otrzymujemy nierówności

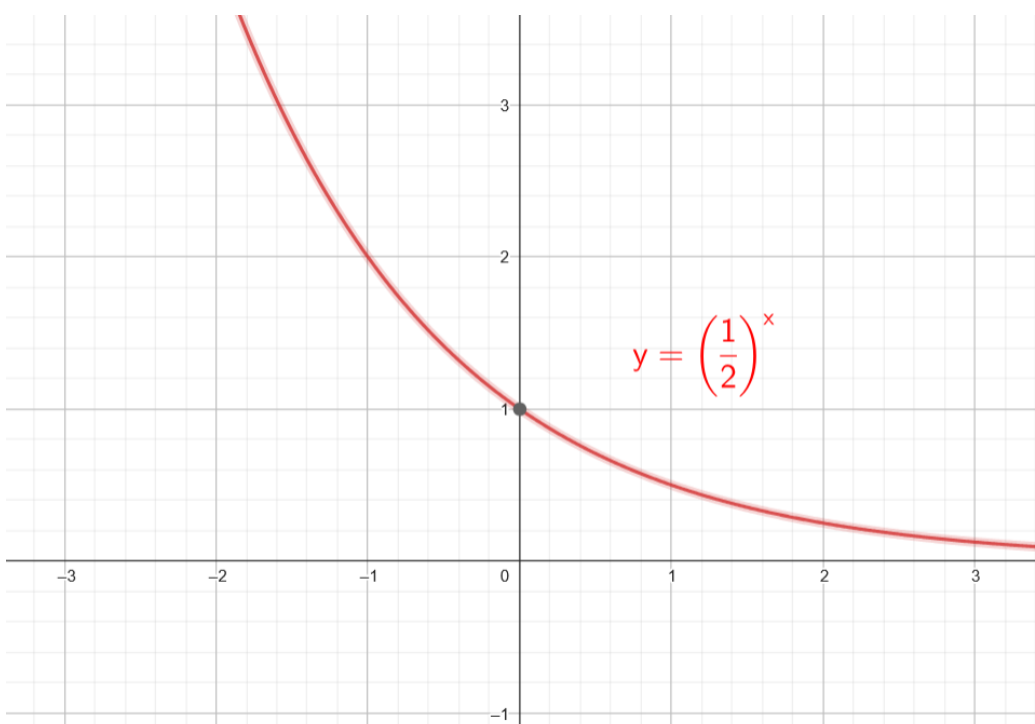
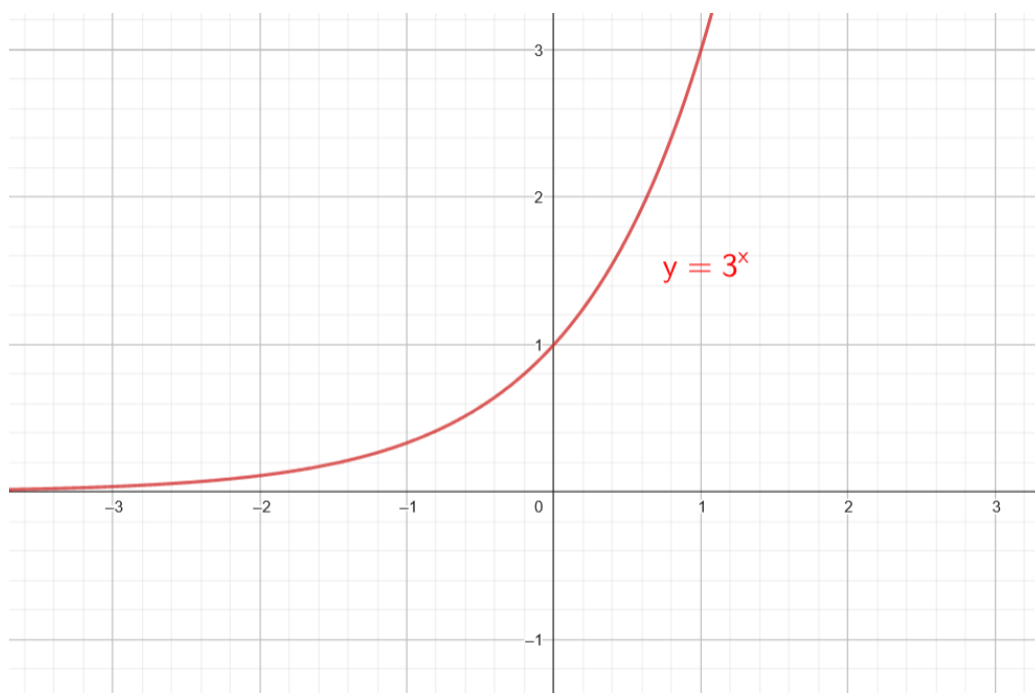
$$3^x > 0 \text{ i } 3^x < 1.$$

Nierówność  $3^x > 0$  jest spełniona dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$ . Mamy więc

$$3^x < 1$$

$$3^x < 3^0.$$

Przypomnijmy, że funkcja wykładnicza  $f(x) = a^x$ , gdzie  $a > 0$  i  $a \neq 1$  jest rosnąca gdy  $a > 1$ , zaś jest malejąca gdy  $a \in (0,1)$ . Na poniższych rysunkach przypominamy przykładowe wykresy funkcji wykładniczych w obu przypadkach.



Wracając do nierówności

$$3^x < 3^0,$$

ponieważ  $3 > 1$ , zatem otrzymujemy

$$x < 0.$$

### Zadanie

Rozwiązać równanie

$$\log_2(\sqrt{2x}) + \log_2(\sqrt{4x+13}) + 1 = \log_2 6.$$

### Rozwiązanie

Wyznaczamy dziedzinę równania - zakładamy, że wyrażenia pod pierwiastkami są nieujemne oraz że wyrażenia pod logarytmami są dodatnie. Zatem wystarczy założyć, że wyrażenia pod pierwiastkami są dodatnie

$$2x > 0 \text{ i } 4x + 13 > 0,$$

$$x > 0 \text{ i } x > -\frac{13}{4}.$$

Zatem równanie określone dla  $x \in (0, +\infty)$ .

Przypomnijmy niezbędne własności dla logarytmów

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c), \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0,$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}, \quad a > 0, a \neq 1, b, c > 0,$$

oraz

$$\log_a a = 1, \quad a > 0, a \neq 1.$$

Mamy

$$\log_2(\sqrt{2x} \cdot \sqrt{4x+13}) + \log_2 2 = \log_2 6$$

$$\log_2(\sqrt{2x} \cdot \sqrt{4x+13}) = \log_2 6 - \log_2 2$$

$$\log_2(\sqrt{2x} \cdot \sqrt{4x+13}) = \log_2 \frac{6}{2}$$

$$\log_2(\sqrt{2x} \cdot \sqrt{4x+13}) = \log_2 3$$

Z poniższej własności

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0,$$

otrzymujemy

$$\log_2 \left[ (2x)^{\frac{1}{2}} \cdot (4x + 13)^{\frac{1}{2}} \right] = \log_2 3,$$

$$\log_2 [2x \cdot (4x + 13)]^{\frac{1}{2}} = \log_2 3,$$

$$\frac{1}{2} \log_2 [2x \cdot (4x + 13)] = \log_2 3.$$

Po pomnożeniu obu stron równania przez 2 otrzymujemy

$$\log_2 [2x \cdot (4x + 13)] = 2 \log_2 3.$$

$$\log_2 [2x \cdot (4x + 13)] = \log_2 3^2,$$

$$\log_2 [2x \cdot (4x + 13)] = \log_2 9.$$

Zatem

$$2x \cdot (4x + 13) = 9,$$

$$8x^2 + 26x = 9,$$

$$8x^2 + 26x - 9 = 0.$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe

$$\Delta = 26^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-9) = 676 + 288 = 964.$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{964} = \sqrt{4 \cdot 241} = 2\sqrt{241} \approx 2 \cdot 15,52.$$

Stąd

$$x_1 = \frac{-26 - 2\sqrt{241}}{2 \cdot 8} = \frac{-13 - \sqrt{241}}{8} \notin (0, +\infty),$$

$$x_2 = \frac{-26 + 2\sqrt{241}}{2 \cdot 8} = \frac{-13 + \sqrt{241}}{8} \in (0, +\infty).$$

Zatem jedynym rozwiązaniem równania jest

$$x = \frac{-13 + \sqrt{241}}{8} \approx 0,32.$$

## Funkcje trygonometryczne

### Zadanie

Naszkieować wykres funkcji

$$f(x) = |4\cos(x + \pi)| - 2,$$

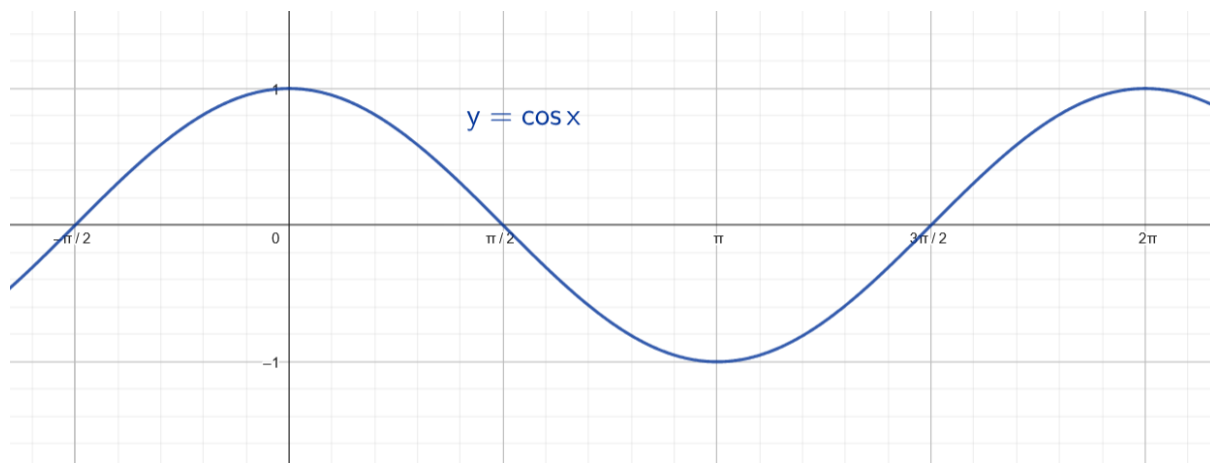
a następnie znaleźć rozwiązanie nierówności

$$f(x) < 0,$$

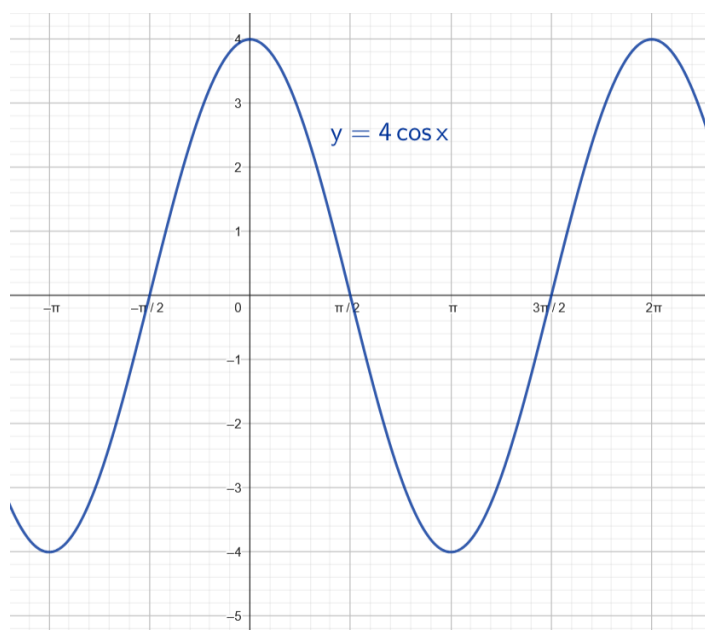
w przedziale  $[0, 2\pi]$ .

## Rozwiązanie

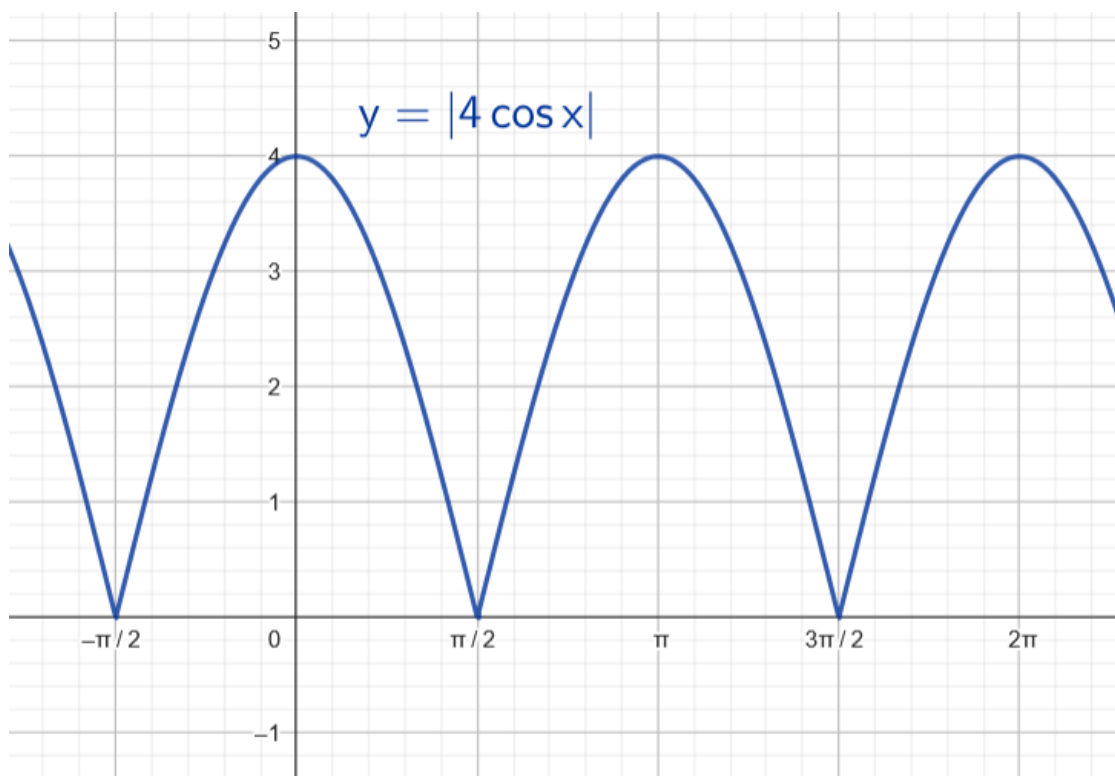
Aby naszkicować wykres funkcji  $y = |4\cos(x + \pi)| - 2$  należy dokonać odpowiednich przekształceń wykresu funkcji  $y = \cos x$ . Przypomnijmy, że wykres funkcji  $y = \cos x$  wygląda następująco.



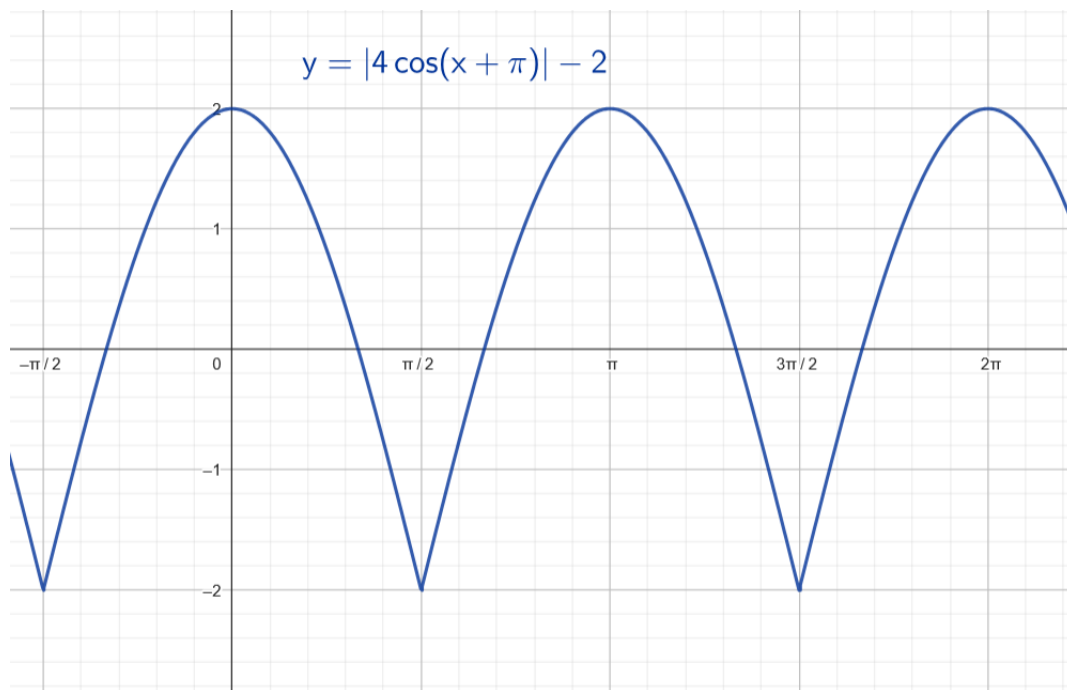
Wykres funkcji  $y = 4\cos x$  wyznaczamy mnożąc każdą wartość funkcji  $y = \cos x$  przez 4. W szczególności: miejsca zerowe dla  $y = 4\cos x$  i  $y = \cos x$  są takie same (bo  $4 \cdot 0 = 0$ ); w punktach, w których funkcja  $y = \cos x$  przyjmuje wartość 1, funkcja  $y = 4\cos x$  przyjmuje wartość 4 itd. Otrzymamy wtedy następujący wykres dla  $y = 4\cos x$ .



Wykres funkcji  $y = |4\cos x|$  otrzymujemy z wykresu funkcji  $y = 4\cos x$  przekształcając przez symetrię względem poziomej osi układu współrzędnych te części wykresu funkcji  $y = 4\cos x$ , dla których  $4\cos x < 0$  tzn. leżących pod osią poziomą, i pozostawiając bez zmian pozostałe (te znajdujące się powyżej osi poziomej) części wykresu tej funkcji. Zatem otrzymujemy następujący wykres dla  $y = |4\cos x|$ .



Przypomnijmy, że wykres funkcji  $y = F(x - a) + b$  otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji  $y = F(x)$  o wektor  $[a, b]$ . Zatem wykres funkcji  $y = |4\cos(x + \pi)| - 2$  otrzymujemy dokonując przesunięcia wykresu funkcji  $y = |4\cos x|$  o wektor  $[-\pi, -2]$ . Otrzymujemy w ten sposób poniższy wykres dla  $y = |4\cos(x + \pi)| - 2$ .



Nierówność  $f(x) < 0$  rozwiązujemy graficznie: rozwiązaniem nierówności będą te przedziały, dla których wykres funkcji  $y = |4\cos(x + \pi)| - 2$  znajduje się poniżej osi poziomej.

Wyznamy analitycznie miejsca zerowe dla  $y = |4\cos(x + \pi)| - 2$  w przedziale  $[0, 2\pi]$ , czyli rozwiązania równania

$$|4\cos(x + \pi)| - 2 = 0,$$

lub równoważnie

$$|4\cos(x + \pi)| = 2.$$

Powyższe równanie jest równoważne poniższym równaniom

$$4\cos(x + \pi) = -2,$$

lub

$$4\cos(x + \pi) = 2.$$

Rozwiązujemy pierwsze z tych równań, czyli

$$4\cos(x + \pi) = -2.$$

Mamy

$$4\cos(x + \pi) = -2,$$

$$\cos(x + \pi) = -\frac{1}{2},$$

$$x + \pi = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x + \pi = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

gdzie  $k$  jest dowolną liczbą całkowitą. Stąd

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Rozwiązujemy drugie równanie, czyli

$$4\cos(x + \pi) = 2.$$

Mamy

$$\cos(x + \pi) = \frac{1}{2},$$

$$x + \pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x + \pi = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$x = -\pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x = -\pi + 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$$

Spośród powyższych wartości, do przedziału  $[0, 2\pi]$  należą jedynie liczby

$$\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi.$$

Na wykresie funkcji  $f(x) = |4\cos(x + \pi)| - 2$  widzimy, że rozwiązaniem nierówności  $f(x) < 0$  w przedziale  $[0, 2\pi]$  jest

$$x \in \left(\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right) \cup \left(\frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right).$$

### Zadanie

Znaleźć rozwiązanie równania

$$\sin 3x = \cos 2x,$$

oraz rozwiązanie nierówności

$$\sin 3x \geq \cos 2x,$$

w przedziale  $[0, 2\pi]$ .

### Rozwiązanie

Wykorzystujemy tożsamość

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

do prawej strony równania i otrzymujemy

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos 2x,$$

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right).$$

Przypomnijmy, że jeśli  $\cos \alpha = \cos \beta$ , to

$$\alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{lub} \quad \alpha = -\beta + 2k\pi,$$

gdzie  $k$  jest dowolną liczbą całkowitą. Zatem

$$2x = \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2k\pi,$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 2x = -\frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi.$$

Rozwiązujemy pierwsze równanie

$$5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}.$$

Rozwiązujemy drugie równanie

$$2x = -\frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi,$$

$$-x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi.$$

Zatem otrzymujemy rozwiązania

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi.$$

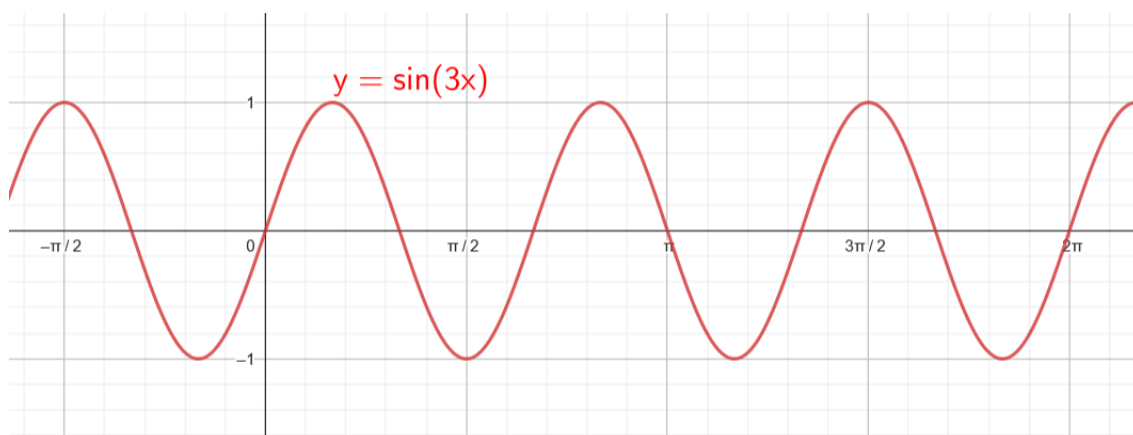
Spośród powyższych liczb, w przedziale  $[0, 2\pi]$  znajdują się liczby

$$\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}.$$

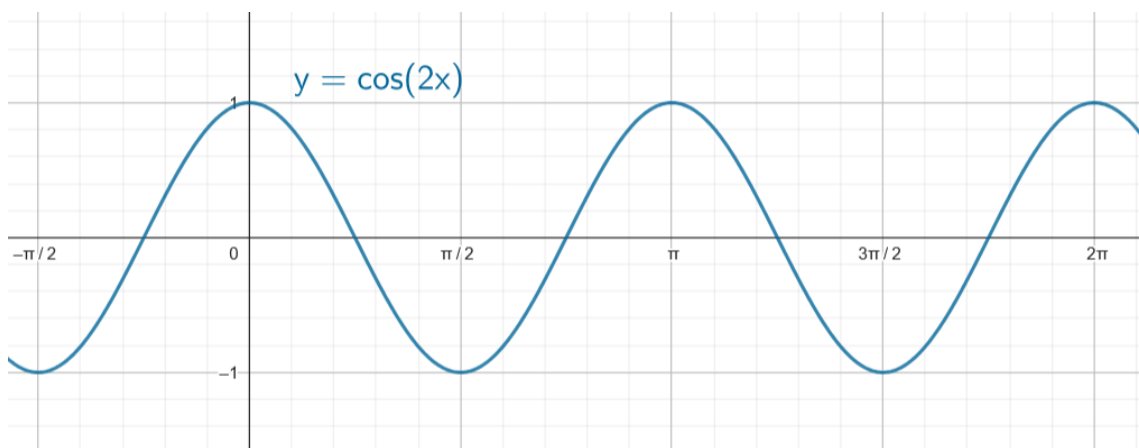
Aby znaleźć rozwiązanie w przedziale  $[0, 2\pi]$  nierówności

$$\sin 3x \geq \cos 2x,$$

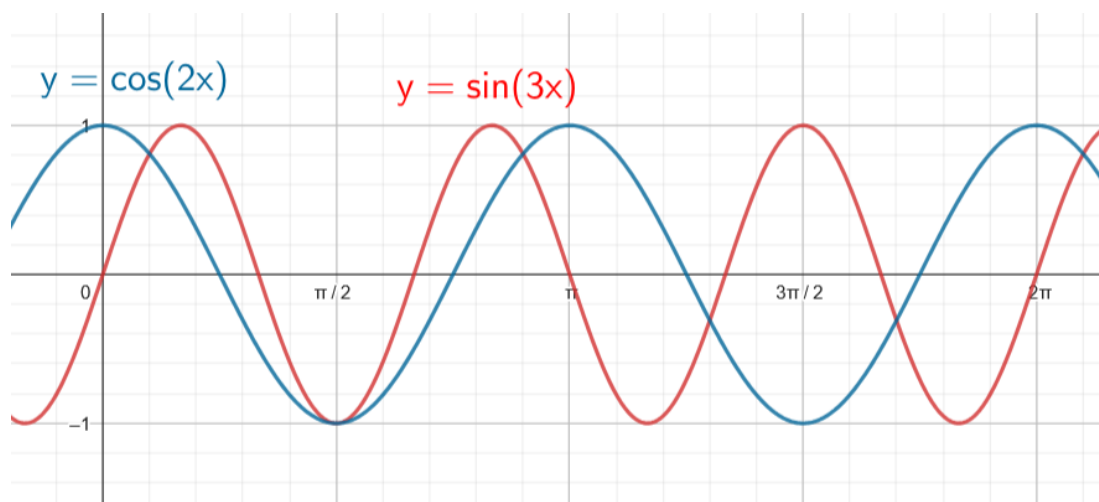
naszkicujemy najpierw wykresy funkcji obu stron nierówności. Wykres funkcji  $y = \sin 3x$  przedstawia poniższy rysunek.



Poniżej przedstawiony jest wykres funkcji  $y = \cos 2x$ .



Przedstawmy oba wykresy na jednym rysunku.



Rozwiązaniem nierówności są te przedziały zawarte w  $[0, 2\pi]$ , w których wykres funkcji  $y = \sin 3x$  jest powyżej lub równy wykresowi  $y = \cos 2x$ . Zatem rozwiązanie nierówności to

$$x \in \left[ \frac{\pi}{10}, \frac{9\pi}{10} \right] \cup \left[ \frac{13\pi}{10}, \frac{17\pi}{10} \right].$$

## Granice ciągów

### Zadanie

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 - n + 2n^3)(1 - n^2)}{(5 + n)^3(1 - n)^2}.$$

### Rozwiązanie

Mamy

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 - n + 2n^3)(1 - n^2)}{(5 + n)^3(1 - n)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \cdot \left( \frac{2}{n^3} - \frac{n}{n^3} + 2 \right) \cdot n^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right)}{\left( n \cdot \left( \frac{5}{n} + 1 \right) \right)^3 \left( n \cdot \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \right)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \cdot \left( \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^2} + 2 \right) \cdot \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right)}{n^3 \cdot \left( \frac{5}{n} + 1 \right)^3 \cdot n^2 \cdot \left( \frac{1}{n} - 1 \right)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \cdot \left( \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^2} + 2 \right) \cdot \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right)}{n^5 \cdot \left( \frac{5}{n} + 1 \right)^3 \cdot \left( \frac{1}{n} - 1 \right)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 2 \cdot \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2} + 2 \right) \cdot \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right)}{\left( 5 \cdot \frac{1}{n} + 1 \right)^3 \cdot \left( \frac{1}{n} - 1 \right)^2}. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

Wykorzystując własności (przy założeniu, że granice poniższych ciągów istnieją i są skończone

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 - n + 2n^3)(1 - n^2)}{(5 + n)^3(1 - n)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 \cdot \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2} + 2\right) \cdot \left(\frac{1}{n^2} - 1\right)}{\left(5 \cdot \frac{1}{n} + 1\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{n} - 1\right)^2} = \\ &= \frac{(2 \cdot 0 - 0 + 2) \cdot (0 - 1)}{(5 \cdot 0 + 1)^2 \cdot (0 - 1)^3} = \frac{2 \cdot (-1)}{1^2 \cdot (-1)^3} = \frac{-2}{-1} = 2. \end{aligned}$$

#### Zadanie

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{5n^2 + 3n + 1} - \sqrt{5n^2 + n} \right).$$

#### Rozwiązanie

Mamy

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{5n^2 + 3n + 1} - \sqrt{5n^2 + n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{5n^2 + 3n + 1} - \sqrt{5n^2 + n} \right) \cdot \frac{(\sqrt{5n^2 + 3n + 1} + \sqrt{5n^2 + n})}{(\sqrt{5n^2 + 3n + 1} + \sqrt{5n^2 + n})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{5n^2 + 3n + 1} - \sqrt{5n^2 + n}) \cdot (\sqrt{5n^2 + 3n + 1} + \sqrt{5n^2 + n})}{\sqrt{5n^2 + 3n + 1} + \sqrt{5n^2 + n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{5n^2 + 3n + 1})^2 - (\sqrt{5n^2 + n})^2}{\sqrt{5n^2 + 3n + 1} + \sqrt{5n^2 + n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n + 1 - (5n^2 + n)}{\sqrt{5n^2 + 3n + 1} + \sqrt{5n^2 + n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n + 1 - 5n^2 - n}{\sqrt{5n^2 + 3n + 1} + \sqrt{5n^2 + n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{\sqrt{5n^2 + 3n + 1} + \sqrt{5n^2 + n}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2 \left(5 + \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)} + \sqrt{n^2 \left(5 + \frac{n}{n^2}\right)}}$$

Korzystając z własności

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad a, b \geq 0,$$

otrzymujemy dalej

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2} \cdot \sqrt{5 + \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{n^2} \cdot \sqrt{5 + \frac{n}{n^2}}} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{n \cdot \sqrt{5 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + n \cdot \sqrt{5 + \frac{1}{n}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{n \cdot \left(\sqrt{5 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{5 + \frac{1}{n}}\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{\sqrt{5 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{5 + \frac{1}{n}}} = \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{1}{n} = 0,$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

przy założeniu, że  $a_n \geq 0$  dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  istnieje (jest liczbą skończoną), zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{5 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{5}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{5 + \frac{1}{n}} = \sqrt{5}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{5n^2 + 3n + 1} - \sqrt{5n^2 + n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{\sqrt{5 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{5 + \frac{1}{n}}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{5}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

### Zadanie

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} + 5^{n-1}}{2 \cdot 3^{2n+1} + 2^n}.$$

### Rozwiązanie

Korzystamy z poniższych praw działań na potęgach

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m, (a^n)^m = a^{n \cdot m}, a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a > 0.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} + 5^{n-1}}{2 \cdot 3^{2n+1} + 2^n} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3^2 + 5^n \cdot 5^{-1}}{2 \cdot 3^{2n} \cdot 3 + 2^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left( \frac{3^n}{5^n} \cdot 9 + 5^{-1} \right)}{3^{2n} \left( 6 + \frac{2^n}{3^{2n}} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left( \frac{3^n}{5^n} \cdot 9 + \frac{1}{5} \right)}{(3^2)^n \cdot \left( 6 + \frac{2^n}{(3^2)^n} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{9^n} \cdot \frac{\frac{3^n}{5^n} \cdot 9 + \frac{1}{5}}{6 + \frac{2^n}{9^n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{9} \right)^n \cdot \frac{\left( \frac{3}{5} \right)^n \cdot 9 + \frac{1}{5}}{6 + \left( \frac{2}{9} \right)^n}. \end{aligned}$$

Teraz wykorzystujemy własność ciągu geometrycznego: jeśli  $|q| < 1$ , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0,$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} + 5^{n-1}}{2 \cdot 3^{2n+1} + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot 9 + \frac{1}{5}}{6 + \left(\frac{2}{9}\right)^n} = 0 \cdot \frac{0 \cdot 9 + \frac{1}{5}}{6 + 0} = 0.$$

### Zadanie

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 3}{n^3 + 4}\right)^{5n^3 + 6}.$$

### Rozwiązanie

Wykorzystamy tu fakt, że jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

lub

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Zauważmy też, że dla dowolnego  $b \neq 0$  mamy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{a_n}\right)^{a_n} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n/b}\right)^{a_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{a_n/b}\right)^{a_n/b}\right)^b. \end{aligned}$$

Jeśli  $a_n \rightarrow \infty$  (może być  $+\infty$  lub  $-\infty$ ) gdy  $n \rightarrow +\infty$ , to również  $a_n/b \rightarrow \infty$ , zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{a_n/b}\right)^{a_n/b}\right)^b = e^b.$$

Mamy

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 3}{n^3 + 4}\right)^{5n^3 + 6} = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 3}{n^3 + 4}\right)^{5n^3} \cdot \left(\frac{n^3 + 3}{n^3 + 4}\right)^6 = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 \left(1 + \frac{3}{n^3}\right)}{n^3 \left(1 + \frac{4}{n^3}\right)}\right)^{5n^3} \cdot \left(\frac{n^3 \left(1 + \frac{3}{n^3}\right)}{n^3 \left(1 + \frac{4}{n^3}\right)}\right)^6 = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{4}{n^3}}\right)^{5n^3} \cdot \left(\frac{1 + \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{4}{n^3}}\right)^6 = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{n^3}\right)^{5n^3}}{\left(1 + \frac{4}{n^3}\right)^{5n^3}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{3}{n^3}\right)^6}{\left(1 + \frac{4}{n^3}\right)^6} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\left(1 + \frac{3}{n^3}\right)^{n^3}\right)^5}{\left(\left(1 + \frac{4}{n^3}\right)^{n^3}\right)^5} \cdot \frac{\left(1 + \frac{3}{n^3}\right)^6}{\left(1 + \frac{4}{n^3}\right)^6}. \end{aligned}$$

Wiemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3} = 0,$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^3} = 0.$$

Ze względu na fakt, że wykładnik "6" występujący w wyrazach poniższych ciągów nie zależy od  $n$ , mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n^3}\right)^6 = (1 + 0)^6 = 1^6 = 1,$$

i podobnie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n^3}\right)^6 = (1 + 0)^6 = 1^6 = 1.$$

Wykorzystując wspomniany wyżej fakt, że dla dowolnego  $b \neq 0$  zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{a_n}\right)^{a_n} = e^b,$$

o ile  $a_n$  jest rozbieżny do nieskończoności, otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{3}{n^3}\right)^{n^3} \right)^5 = (e^3)^5 = e^{3 \cdot 5} = e^{15}.$$

Analogicznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{4}{n^3}\right)^{n^3} \right)^5 = (e^4)^5 = e^{4 \cdot 5} = e^{20}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + 3}{n^3 + 4} \right)^{5n^3 + 6} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \left(1 + \frac{3}{n^3}\right)^{n^3} \right)^5 \cdot \left(1 + \frac{3}{n^3}\right)^6}{\left( \left(1 + \frac{4}{n^3}\right)^{n^3} \right)^5 \cdot \left(1 + \frac{4}{n^3}\right)^6} = \frac{e^{15}}{e^{20}} \cdot \frac{1}{1} = e^{15-20} = e^{-5}. \end{aligned}$$

## Granice funkcji, ciągłość funkcji, asymptoty

### Zadanie

Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right).$$

### Rozwiązanie

Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{4}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{1}{x - 2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{4}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{x + 2}{(x - 2)(x + 2)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - (x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x - 2}{(x - 1)(x + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{(x - 2)(x + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x + 2} = \frac{-1}{2 + 2} = -\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

### Zadanie

Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^5 + 10x^3 + 4x^2 - x + 1).$$

### Rozwiązanie

Mamy

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^5 + 10x^3 + 4x^2 - x + 1) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \cdot \left( -3 + 10 \cdot \frac{x^3}{x^5} + 4 \cdot \frac{x^2}{x^5} - \frac{x}{x^5} + 1 \cdot \frac{1}{x^5} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \cdot \left( -3 + 10 \cdot \frac{1}{x^2} + 4 \cdot \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + 1 \cdot \frac{1}{x^5} \right).
 \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty,$$

oraz dla  $k \in \{2, 3, 4, 5\}$ , mamy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0.$$

Stąd

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -3 + 10 \cdot \frac{1}{x^2} + 4 \cdot \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + 1 \cdot \frac{1}{x^5} \right) = -3 + 10 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 0 + 1 \cdot 0 = -3.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^5 + 10x^3 + 4x^2 - x + 1) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \cdot \left( -3 + 10 \cdot \frac{1}{x^2} + 4 \cdot \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + 1 \cdot \frac{1}{x^5} \right) = +\infty.
 \end{aligned}$$

### Zadanie

Oblicz granicę funkcji

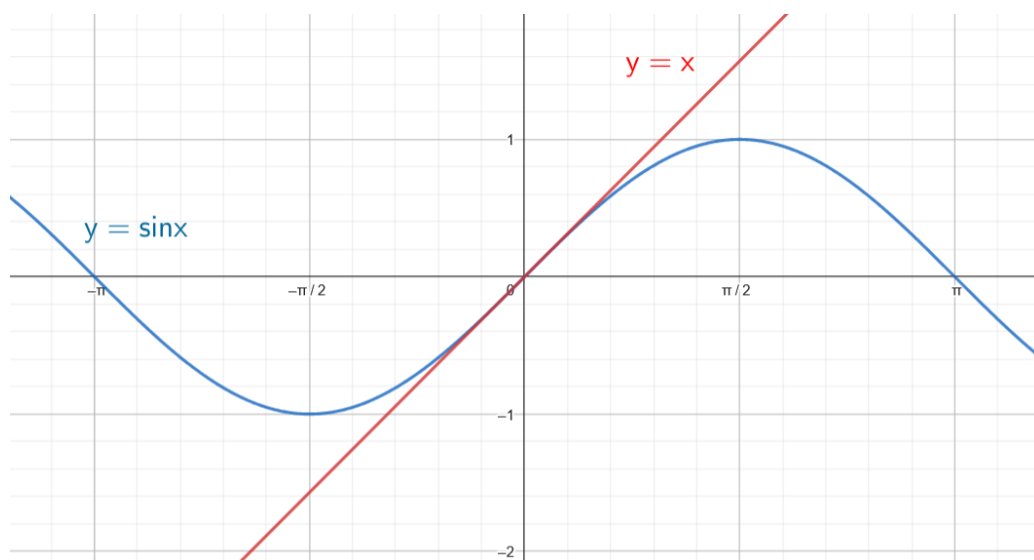
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{\sin 5x \cdot \cos 2x}.$$

### Rozwiązanie (I sposób)

Prawdziwe są wzory

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

Powyższe równości oznaczają, że przy wartości miary (łukowej) kąta bliskiej zeru, wartość sinusa tego kąta jest bardzo bliska wartości miary tego kąta. Fakt ten przedstawia poniższy rysunek: blisko początku układu współrzędnych wykresy funkcji  $y = \sin x$  i funkcji  $y = x$  prawie się pokrywają.



Wykorzystamy powyższe równości do obliczenia rozważanej granicy. Pomnożymy przez  $10x$  licznik i mianownik funkcji, której granicę obliczamy, czyli

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{\sin 5x \cdot \cos 2x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x \cdot \sin 10x}{10x \cdot \sin 5x \cdot \cos 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 5x \cdot \sin 10x}{10x \cdot \sin 5x \cdot \cos 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{\sin 10x}{10x} \cdot \frac{1}{\cos 2x}. \end{aligned}$$

Jeżeli  $x \rightarrow 0$  to  $5x \rightarrow 0$  i  $10x \rightarrow 0$ . Zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{10x} = 1.$$

Dodatkowo, jeżeli  $x \rightarrow 0$  to  $2x \rightarrow 0$ , z ciągłości funkcji  $\cos 2x$  mamy:

$$\cos 2x \rightarrow \cos(2 \cdot 0) = \cos 0 = 1.$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{\sin 5x \cdot \cos 2x} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{\sin 10x}{10x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} &= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

### Zadanie

Wyznacz asymptoty funkcji:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2}.$$

### Rozwiązanie

Wyznaczamy dziedzinę funkcji  $f(x)$ . Musimy założyć, że mianownik  $x^2 + 3x + 2$  jest różny od zera. Mamy  $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$ , zatem równanie

$$x^2 + 3x + 2 = 0,$$

posiada dwa rozwiązania

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2} = \frac{-4}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Zatem dziedziną funkcji  $f(x)$  jest zbiór

$$\mathbb{R} \setminus \{-2, -1\} = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty).$$

Aby zbadać czy istnieją asymptoty pionowe trzeba wyznaczyć granice jednostronne funkcji  $f(x)$  w punktach  $-2$  i  $-1$ . Ponieważ

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1),$$

zatem szkic wykresu funkcji  $(x + 2)(x + 1)$  ma postać

RYS

Na podstawie tego wykresu można stwierdzić jakiego znaku jest mianownik  $(x + 2)(x + 1)$  funkcji  $f(x)$  "blisko" punktów  $-2$  i  $-1$ , z ich lewej i prawej strony. Mianowicie

27



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.  
Utwór dostępny jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} x^2 + 3x + 2 = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x+2)(x+1) = 0^+,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 + 3x + 2 = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x+2)(x+1) = 0^-,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + 3x + 2 = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+2)(x+1) = 0^-,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + 3x + 2 = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+2)(x+1) = 0^+.$$

Mamy więc

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3}{(x+2)(x+1)} = \left[ \frac{(-2)^3}{0^+} = \frac{-8}{0^+} \right] = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3}{(x+2)(x+1)} = \left[ \frac{(-2)^3}{0^-} = \frac{-8}{0^-} \right] = +\infty.$$

Obie granice (wystarczy co najmniej jedna) jednostronne funkcji  $f(x)$  w punkcie  $x = -2$  są nieskończone, zatem prosta  $x = -2$  jest asymptotą pionową wykresu funkcji  $f(x)$ .

Podobnie dla punktu  $x = -1$  otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{(x+2)(x+1)} = \left[ \frac{(-1)^3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} \right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{(x+2)(x+1)} = \left[ \frac{(-1)^3}{0^+} = \frac{-1}{0^+} \right] = -\infty.$$

Ponownie obie granice (wystarczy co najmniej jedna) jednostronne funkcji  $f(x)$  w punkcie  $x = -1$  są nieskończone, zatem prosta  $x = -1$  jest również asymptotą pionową wykresu funkcji  $f(x)$ .

Zbadamy teraz istnienie asymptoty ukośnej, czyli prostej  $y = ax + b$  (w szczególnym przypadku, gdy  $a = 0$ , prosta ta jest równoległa do poziomej osi układu współrzędnych i nazywana jest asymptotą poziomą). Współczynniki  $a, b$  tej prostej oblicza się ze wzorów

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax).$$

Aby istniała asymptota ukośna (a w szczególności asymptota pozioma), obie granice określające współczynniki  $a$  i  $b$  muszą być liczbami skończonymi. Mamy

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2} \cdot \frac{1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1,$$

oraz

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2}{x^2 + 3x + 2} - 1 \cdot x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2} - \frac{x(x^2 + 3x + 2)}{x^2 + 3x + 2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x(x^2 + 3x + 2)}{x^2 + 3x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 - 3x^2 - 2x}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^2 - 2x}{x^2 + 3x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left( -3 - \frac{2}{x} \right)}{x^2 \left( 1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = -3. \end{aligned}$$

Zatem prosta  $y = x - 3$  jest asymptotą ukośną.

#### Zadanie

Zbadaj ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}, & x < -1 \\ 2, & x = -1 \\ 2^{x+1} + 1, & -1 \leq x \leq 2 \\ 9, & x = 2 \\ -\ln(x - 1) + 9, & x > 2 \end{cases}$$

i naszkicuj jej wykres.

#### Rozwiązanie

Funkcja  $f(x)$  jest ciągła w przedziałach  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(2, +\infty)$ , ponieważ w każdym z przedziałów jest funkcją elementarną wymierną, wykładniczą i logarytmiczną dobrze określoną w odpowiednim przedziale. Pozostaje sprawdzić czy funkcja jest ciągła w punktach zmiany wzoru funkcji  $f(x)$ , czyli w punktach  $-1$  i  $2$ . Warunkiem ciągłości w punkcie  $x_0$  jest spełnianie równości

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Zauważmy, że dla  $x < -1$  mamy

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3},$$

gdzie dla mianownika  $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$  i jego pierwiastkami są

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Czyli dla  $x < -1$  mamy

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x-1}{x-3}.$$

Badamy ciągłość funkcji  $f(x)$  w punkcie  $x_0 = -1$ . Ponieważ blisko  $x_0 = -1$ , dla  $x < -1$  funkcja  $f(x)$  jest określona innym wzorem niż dla  $x > -1$ , dlatego obliczamy granice jednostronne w tym punkcie. Mamy

$$f(-1) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x-3} = \frac{-1-1}{-1-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2^{x+1} + 1) = 2^{-1+1} + 1 = 2^0 + 1 = 2.$$

Granica lewostronna i prawostronna w punkcie  $x_0 = -1$  nie są równe, zatem  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  nie istnieje, czyli funkcja  $f(x)$  nie jest ciągła w  $x_0 = -1$ .

Badamy ciągłość funkcji  $f(x)$  w punkcie  $x_1 = 2$ . Podobnie jak wcześniej, ponieważ blisko  $x_1 = 2$ , dla  $x < 2$  funkcja  $f(x)$  jest określona innym wzorem niż dla  $x > 2$ , dlatego obliczamy granice jednostronne w tym punkcie. Mamy

$$f(2) = 9,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2^{x+1} + 1) = (2^{2+1} + 1) = 2^3 + 1 = 9,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-\ln(x-1) + 9) = -\ln(2-1) + 9 = -\ln 1 + 9 = 0 + 9 = 9.$$

Granica lewostronna i prawostronna w punkcie  $x_0 = -1$  są równe 9, zatem

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9,$$

i prawdziwa jest równość

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2),$$

czyli funkcja  $f(x)$  jest ciągła w  $x_0 = -1$ .

Naszukujemy poniżej wykres funkcji  $f(x)$ . Zaczniemy od wykresu  $f(x)$  dla  $x < -1$ , czyli

$$f(x) = \frac{x-1}{x-3}, \quad x < -1.$$

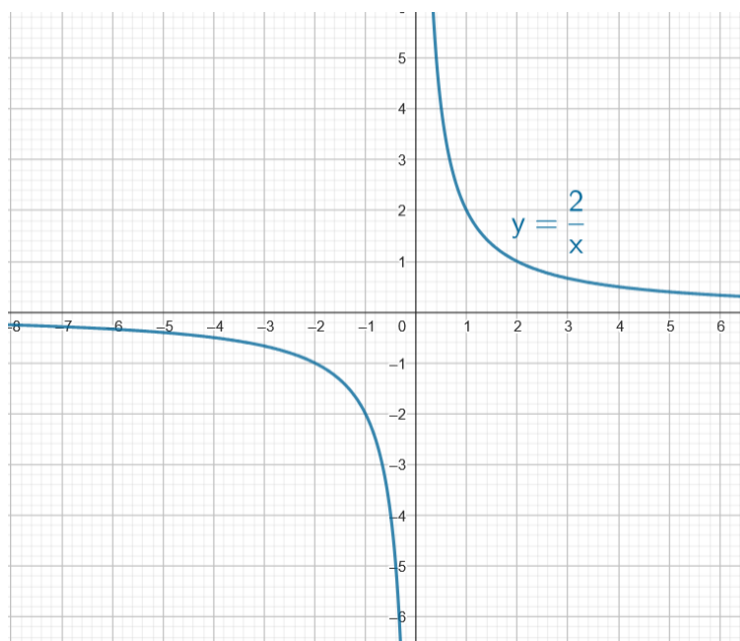
Jest to funkcja homograficzna i jej wykresem jest hiperbola. Mamy

$$f(x) = \frac{x-1}{x-3} = \frac{x-3+2}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{2}{x-3} = 1 + \frac{2}{x-3}, \quad x < -1.$$

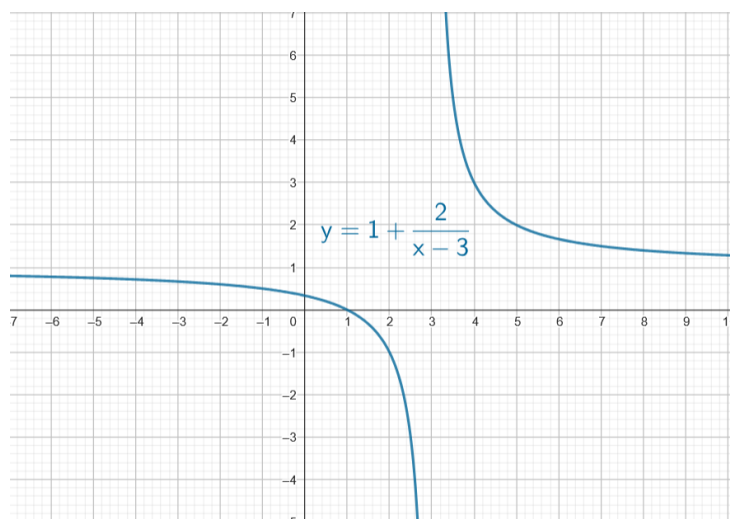
Dla  $x < -1$  wykres funkcji  $f(x)$  jest więc przesunięciem wykresu funkcji  $g(x) = \frac{2}{x}$  o wektor  $v = [3, 1]$ , bowiem w tym przedziale mamy

$$f(x) = g(x-3) + 1.$$

Wykres funkcji  $g(x) = 2/x$  jest postaci



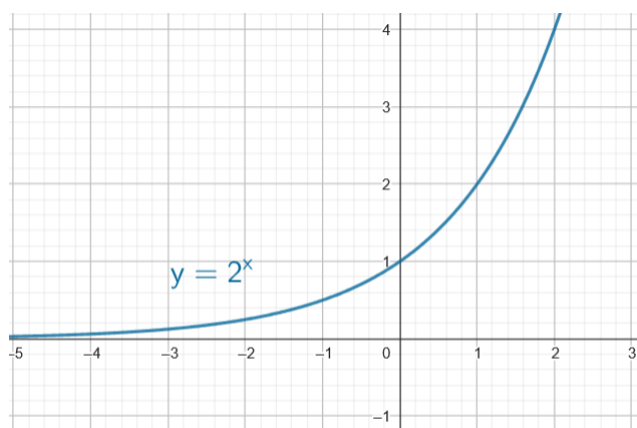
zatem wykres  $f(x)$  jest postaci (posiada asymptotę pionową  $x = 3$  i poziomą  $y = 1$ )



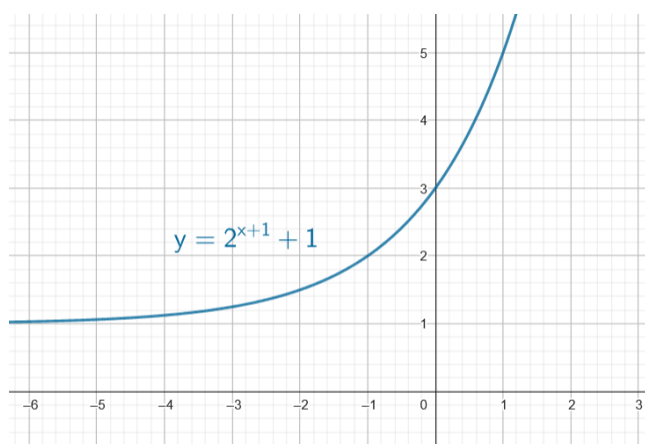
Dla  $x \in (-1, 2)$ , wykres  $f(x) = 2^{x+1} + 1$  jest przesunięciem wykresu  $g(x) = 2^x$  o wektor  $w = [-1, 1]$  bowiem wtedy w tym przedziale mamy

$$f(x) = g(x+1) + 1.$$

Wykres funkcji  $g(x) = 2^x$  jest postaci



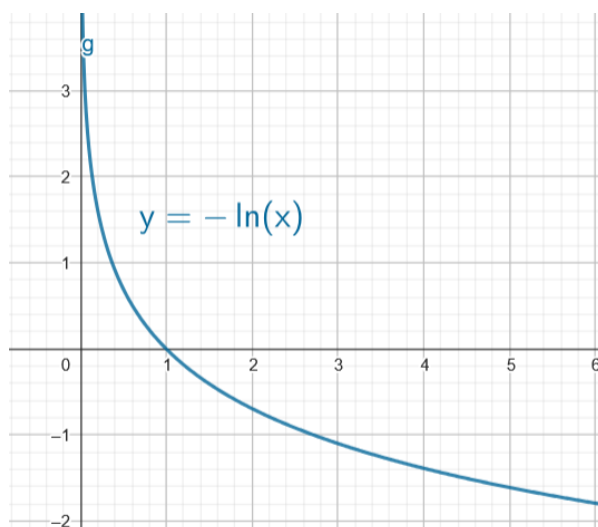
zatem wykres  $f(x)$  jest postaci



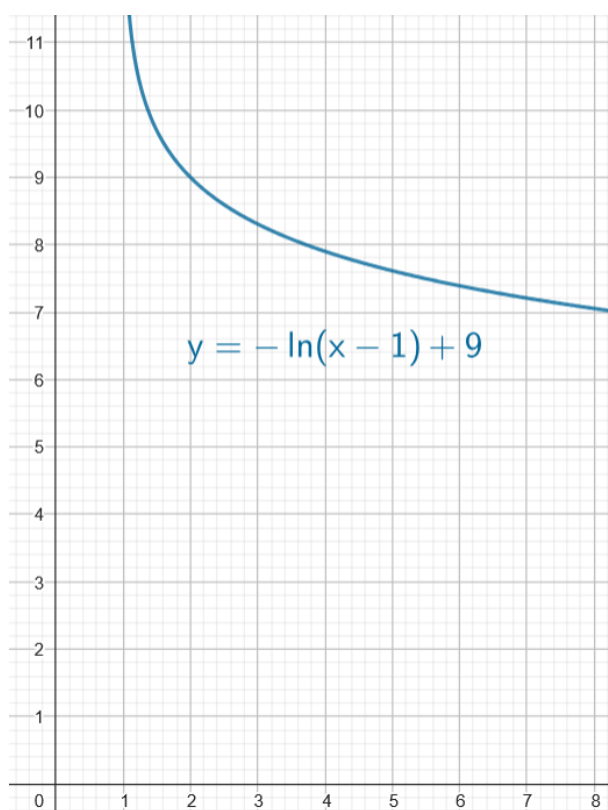
Dla  $x > 2$ , wykres  $f(x) = -\ln(x - 1) + 9$  jest przesunięciem wykresu  $g(x) = -\ln(x)$  o wektor  $w = [1, 9]$  bowiem w tym przedziale mamy

$$f(x) = g(x + 1) + 1.$$

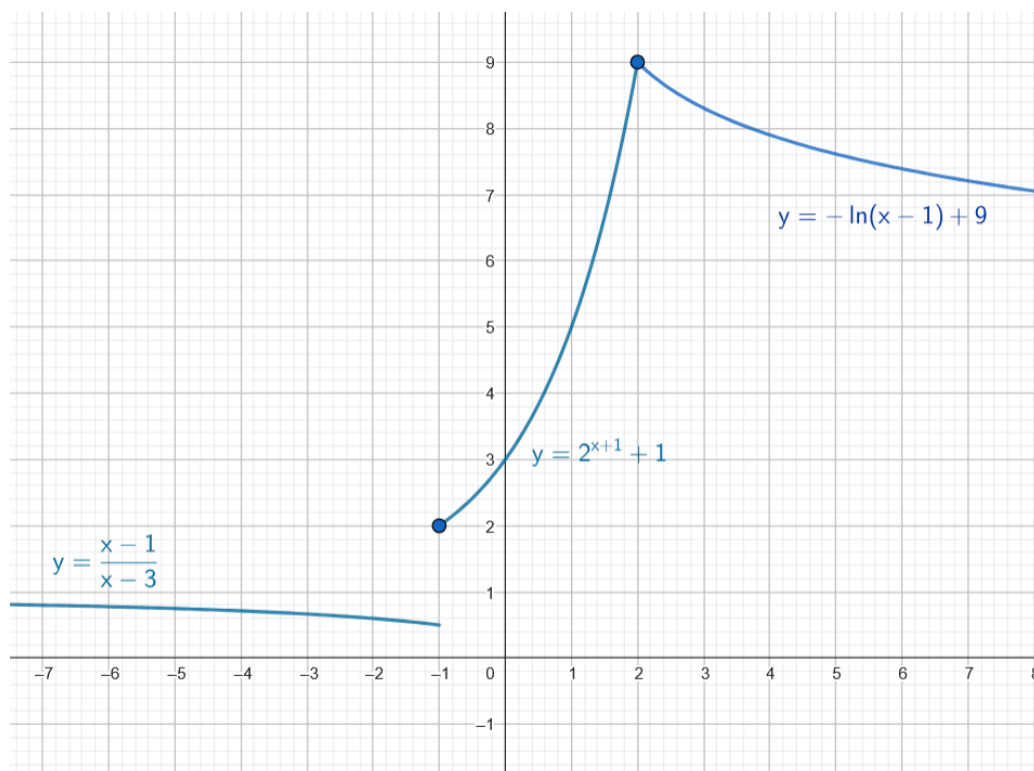
Wykres funkcji  $g(x) = -\ln(x)$  otrzymujemy przez symetrię względem osi poziomej wykresu funkcji  $h(x) = \ln(x)$ , zatem mamy



i stąd wykres  $f(x)$  jest postaci



Ostatecznie, wykres  $f(x)$  otrzymujemy rysując wykresy “cząstkowe” w odpowiednich przedziałach



## Pochodna funkcji jednej zmiennej i jej zastosowania

### Zadanie

Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3\sqrt{5x^2} + 5}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

### Rozwiązanie

Przekształcamy najpierw wzór funkcji z wykorzystaniem praw działań na potęgach.

Mamy

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2 - 3\sqrt{5x^2} + 5}{2\sqrt{x}} \\ f(x) &= \frac{2x^2}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{5}x}{2\sqrt{x}} + \frac{5}{2\sqrt{x}}, \\ f(x) &= \frac{2x^2}{2x^{1/2}} - \frac{3\sqrt{5}x}{2x^{1/2}} + \frac{5}{2x^{1/2}}, \\ f(x) &= x^{3/2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}x^{1/2} + \frac{5}{2}x^{-1/2}. \end{aligned}$$

Korzystamy teraz ze wzoru

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1},$$

oraz z własności

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x),$$

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( x^{3/2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}x^{1/2} + \frac{5}{2}x^{-1/2} \right)', \\ f'(x) &= \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} - \frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{5}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{1}{2}-1} \\ f'(x) &= \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{3\sqrt{5}}{4}x^{-1/2} - \frac{5}{4}x^{-3/2} \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{x}} - \frac{5}{4\sqrt{x^3}}$$

### Zadanie

Oblicz pochodne rzędu pierwszego i drugiego dla funkcji

$$f(x) = e^x \cdot \cos x.$$

### Rozwiązanie

Stosujemy wzór na pochodną iloczynu:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Mamy

$$(e^x)' = e^x,$$

oraz

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

Zatem

$$f'(x) = e^x \cdot \cos x + e^x \cdot (-\sin x),$$

$$f'(x) = e^x(\cos x - \sin x).$$

Obliczamy pochodną rzędu drugi

$$f''(x) = \{e^x(\cos x - \sin x)\}',$$

$$f''(x) = (e^x)'(\cos x - \sin x) + e^x \cdot (\cos x - \sin x)',$$

Ponieważ

$$(\sin x)' = \cos x,$$

więc

$$f''(x) = (e^x)'(\cos x - \sin x) + e^x \cdot (\cos x - \sin x)',$$

$$f''(x) = e^x(\cos x - \sin x) + e^x \cdot (-\sin x - \cos x),$$

$$f''(x) = e^x(\cos x - \sin x - \sin x - \cos x),$$

$$f''(x) = -2e^x \cdot \sin x.$$

### Zadanie

Oblicz pochodną dla funkcji

$$f(x) = \frac{2^{2x} + 1}{\cos(x^2 + 1) + 1}.$$

### Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na pochodną ilorazu:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2},$$

oraz ze wzoru na pochodną funkcji złożonej

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Obliczmy najpierw pochodną funkcji znajdującej się w liczniku ułamka. Mamy

$$(2^{2x} + 1)' = (2^{2x})' + (1)' = (2^{2x})'.$$

Niech  $f(x) = 2^x$  oraz  $g(x) = 2x$ . Zauważmy, że funkcja złożona  $f(g(x))$  to

$$f(g(x)) = 2^{g(x)} = 2^{2x}.$$

Prawdziwy jest również wzór

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \text{ gdzie } a > 0, a \neq 0.$$

Mamy więc

$$f'(x) = (2^x)' = 2^x \cdot \ln 2,$$

oraz

$$g'(x) = (2x)' = 2 \cdot (x)' = 2.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji złożonej otrzymujemy, że

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2^{g(x)} \cdot \ln 2 \cdot g'(x),$$

Czyli

$$(2^{2x})' = (f(g(x)))' = 2^{2x} \cdot \ln 2 \cdot 2 = 2 \ln 2 \cdot 2^{2x}.$$

Obliczmy teraz pochodną funkcji znajdującej się w mianowniku. Mamy

$$(\cos(x^2 + 1) + 1)' = (\cos(x^2 + 1))' + (1)' = (\cos(x^2 + 1))'.$$

Niech teraz  $f(x) = \cos x$  oraz  $g(x) = x^2 + 1$ . Mamy więc

$$f(g(x)) = \cos(g(x)) = \cos(x^2 + 1).$$

Ponieważ

$$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x,$$

oraz

$$g'(x) = (x^2 + 1)' = 2x.$$

Stąd

$$(\cos(x^2 + 1))' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = -\sin(g(x)) \cdot g'(x).$$

Zatem

$$(\cos(x^2 + 1))' = -\sin(x^2 + 1) \cdot 2x = -2x \cdot \sin(x^2 + 1).$$

Ostatecznie, korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu obliczamy pochodną rozważanej funkcji

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{2^{2x} + 1}{\cos(x^2 + 1) + 1} \right)' = \\ &= \frac{(2^{2x} + 1)' \cdot (\cos(x^2 + 1) + 1) - (2^{2x} + 1) \cdot (\cos(x^2 + 1) + 1)'}{(\cos(x^2 + 1) + 1)^2} = \\ &= \frac{2\ln 2 \cdot 2^{2x} \cdot (\cos(x^2 + 1) + 1) - (2^{2x} + 1) \cdot (-2x \cdot \sin(x^2 + 1))}{(\cos(x^2 + 1) + 1)^2} = \\ &= \frac{2\ln 2 \cdot 2^{2x} \cdot (\cos(x^2 + 1) + 1) + 2^{2x} \cdot 2x \cdot \sin(x^2 + 1) + 2x \cdot \sin(x^2 + 1)}{(\cos(x^2 + 1) + 1)^2} = \\ &= \frac{2^{2x} \cdot [2\ln 2 \cdot \cos(x^2 + 1) + 2\ln 2 + 2x \cdot \sin(x^2 + 1)] + 2x \cdot \sin(x^2 + 1)}{(\cos(x^2 + 1) + 1)^2}. \end{aligned}$$

### Zadanie

Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{5x} - \cos x}{\ln(x^2 + 1)}$$

### Rozwiązanie

Zastosujemy tutaj regułę de L'Hospitala która pozwala obliczać granice ilorazu dwóch funkcji, mające formę wyrażenia nieoznaczonego typu  $\frac{0}{0}$  lub  $\frac{\infty}{\infty}$ . Poniżej przypomnimy jej treść.

#### Reguła de L'Hospitala

Rozważmy granicę postaci:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Założmy, że

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0,$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty,$$

oraz że istnieją pochodne  $f'(x)$  i  $g'(x)$  w pewnym otoczeniu punktu  $c$ .

Wówczas

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

o ile granica po prawej stronie powyższej równości istnieje (może być nieskończona).

Sprawdźmy najpierw czy granice funkcji znajdujących się w liczniku i w mianowniku spełniają założenia niezbędne do zastosowania wspomnianej reguły. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{5x} - \cos x) = e^{5 \cdot 0} - \cos 0 = 1 - 1 = 0,$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^2 + 1) = \ln(0^2 + 1) = \ln 1 = 0.$$

Zatem można zastosować regułę de L'Hospitala. Otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{5x} - \cos x}{\ln(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{5x} - \cos x)'}{(\ln(x^2 + 1))'}.$$

Obliczmy niezbędne pochodne. Ze wzoru na pochodną funkcji złożonej otrzymujemy  $(e^{5x} - \cos x)' = (e^{5x})' - (\cos x)' = 5e^{5x} - (-\sin x)$ .

Przypomnijmy, że

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji złożonej otrzymujemy

$$(\ln(x^2 + 1))' = \frac{1}{x^2 + 1} (x^2 + 1)' = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{5x} - \cos x}{\ln(x^2 + 1)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{5x} - \cos x)'}{(\ln(x^2 + 1))'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5e^{5x} - (-\sin x)}{\frac{2x}{x^2 + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (5e^{5x} + \sin x) \cdot \frac{x^2 + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(5e^{5x} + \sin x)(x^2 + 1)}{2x}. \end{aligned}$$

Obliczmy najpierw granicę funkcji będącej licznikiem powyższego ułamka, czyli

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (5e^{5x} + \sin x)(x^2 + 1).$$

Zauważmy, że gdy  $x \rightarrow 0^+$ , to

$$e^{5x} \rightarrow e^{5 \cdot 0} = 1, \sin x \rightarrow \sin 0 = 0 \text{ oraz } x^2 + 1 \rightarrow 0^2 + 1 = 1.$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (5e^{5x} + \sin x)(x^2 + 1) = (5 \cdot 1 + 0) \cdot 1 = 5.$$

Stąd otrzymujemy ostatecznie, że

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{5x} - \cos x}{\ln(x^2 + 1)} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(5e^{5x} + \sin x)(x^2 + 1)}{2x} = \left[ \frac{5}{0^+} \right] = +\infty. \end{aligned}$$

### Zadanie

Oblicz granicę funkcji

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{\sin 5x \cdot \cos 2x}.$$

### Rozwiązanie (II sposób)

Powyższą granicę obliczyliśmy wcześniej bez wykorzystania pochodnych. Zastosujemy teraz do jej obliczenia regułę de L'Hospitala. Sprawdzamy najpierw czy spełnione są założenia. Ponieważ funkcje  $\sin 10x$ ,  $\sin 5x$  i  $\cos 2x$  są funkcjami ciągłymi na zbiorze liczb rzeczywistych, zatem mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 10x = \sin(10 \cdot 0) = \sin 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cdot \cos 2x = \sin(5 \cdot 0) \cos(2 \cdot 0) = \sin 0 \cos 0 = 0 \cdot 1 = 0.$$

Pochodne tych funkcji również istnieją w pewnym otoczeniu 0. Zatem można zastosować regułę de L'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{\sin 5x \cdot \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 10x)'}{(\sin 5x \cdot \cos 2x)'}$$

Mamy

$$(\sin 10x)' = \cos(10x) \cdot (10x)' = 10 \cdot \cos 10x,$$

oraz wykorzystując wzór na pochodną iloczynu funkcji czyli

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

oraz wzór na pochodną funkcji złożonej

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\sin 5x \cdot \cos 2x)' &= (\sin 5x)' \cdot \cos 2x + \sin 5x \cdot (\cos 2x)' \\ &= 5 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \cdot \sin 5x \cdot \sin 2x. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{\sin 5x \cdot \cos 2x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 10x)'}{(\sin 5x \cdot \cos 2x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10 \cdot \cos 10x}{5 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \sin 2x} = \\ &= \frac{10 \cdot \cos 0}{5 \cos 0 \cdot \cos 0 - 2 \sin 0 \cdot \sin 0} = \\ &= \frac{10 \cdot 1}{5 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0} = \frac{10}{5} = 2. \end{aligned}$$

### Zadanie

Niech

$$f(x) = x^3 - 3x - 2.$$

- Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji.
- Wyznaczyć przedziały, w których funkcja  $f(x)$  jest rosnąca, malejąca.
- Wyznaczyć przedziały wypukłości, wklęsłości funkcji  $f(x)$
- Naszkicować wykres tej funkcji.

### Rozwiązanie

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych czyli  $(-\infty, +\infty)$ . Aby wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji  $f(x)$  obliczamy najpierw jej pochodną

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Następnie rozwiązujemy równanie

$$f'(x) = 0,$$

czyli

$$3x^2 - 3 = 0,$$

$$x^2 - 1 = 0,$$

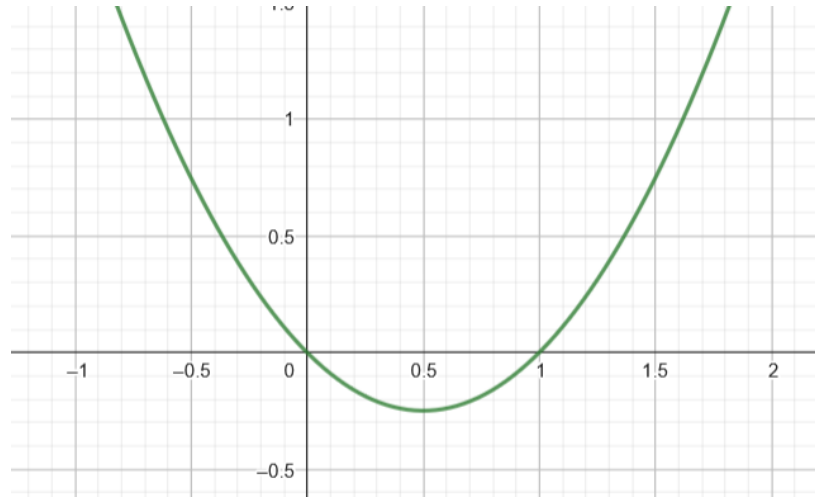
$$(x - 1)(x + 1) = 0.$$

Zatem  $f'(x) = 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $x = -1$  lub  $x = 1$ . Są to punkty, w których być może funkcja przyjmuje ekstremum lokalne. Aby ekstremum lokalne istniało w punkcie  $x_0$ , dla którego  $f'(x_0) = 0$ , wystarczy, że pochodna zmienia znak przy przejściu przez  $x_0$ . Zbadamy teraz znak pochodnej tzn. wyznaczymy rozwiązania nierówności  $f'(x) > 0$  i  $f'(x) < 0$ . Mamy

$$f'(x) > 0,$$

$$(x - 1)(x + 1) > 0,$$

Wykres funkcji kwadratowej po lewej stronie nierówności wygląda następująco.



Zatem:  $f'(x) > 0$  gdy  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ,  $f'(x) < 0$  gdy  $x \in (-1, 1)$ . Wynika stąd, że w punkcie  $x_0 = -1$  pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny - zatem ma w tym punkcie funkcja  $f(x)$  maksimum lokalne. W punkcie  $x_1 = 1$  pochodna zmienia znak z ujemnego na dodatni - zatem ma w tym punkcie funkcja  $f(x)$  minimum lokalne. Obliczmy wartości funkcji w tych punktach. Mamy

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = -1 + 3 - 2 = 0,$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 2 = 1 - 3 - 2 = -4.$$

Funkcja  $f(x)$  jest rosnąca (malejąca) w pewnym przedziale jeśli  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) w tym przedziale. Zatem  $f(x)$  jest rosnąca w przedziałach  $(-\infty, -1)$ ,  $(1, +\infty)$ , zaś jest malejąca w przedziale  $(-1, 1)$ .

Przypomnijmy, że funkcja  $f(x)$  jest wypukła (wklęsła) w pewnym przedziale jeśli  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ ) w tym przedziale (o ile istnieje  $f''(x)$ ). Mamy

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - 3)' = 6x.$$

Stąd  $f''(x) > 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $6x > 0$ , czyli gdy  $x > 0$ .

Zatem  $f(x)$  jest wypukła w przedziale  $(0, +\infty)$ . Zaś  $f''(x) < 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $6x < 0$ , czyli gdy  $x < 0$ , zatem  $f(x)$  jest wklęsła w przedziale  $(-\infty, 0)$ .

Ponieważ  $f$  jest funkcją wielomianową więc nie posiada asymptot. Na koniec, aby

naszkicować wykres tej funkcji, obliczmy jeszcze granice w  $-\infty$  i w  $+\infty$ . Mamy

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x - 2) &= \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{3x}{x^3} - \frac{2}{x^3}\right) &= \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{x^2} - 2 \cdot \frac{1}{x^3}\right).\end{aligned}$$

Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty,$$

zatem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x - 2) = -\infty.$$

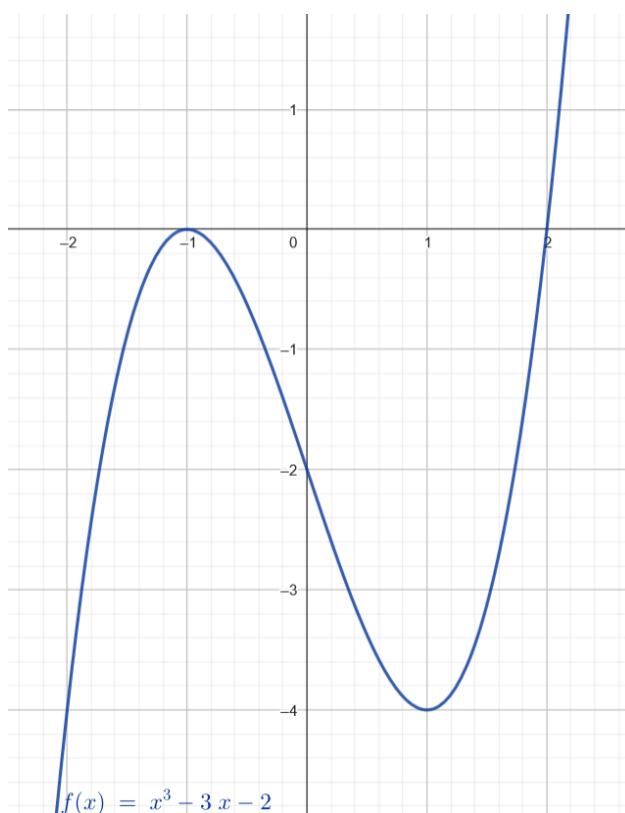
Podobnie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty,$$

zatem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x - 2) = +\infty.$$

Na poniższym rysunku przedstawiamy szkic wykresu funkcji  $f(x)$ .



## Zadanie

Zbadać przebieg zmienności i naszkicować wykres funkcji. Obliczmy pochodne funkcji

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

## Rozwiązanie

- Dziedzina funkcji, punkty szczególne

Zauważmy na początek, że mianownik  $x^2 + 1$  nie posiada pierwiastków ponieważ

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0.$$

Zatem dziedziną rozważanej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych. Oczywiście, wyrażenie  $x^2 + 1 > 0$  dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$ .

Wyznamy miejsca zerowe funkcji. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x^2 + 1} &= 0, \\ 2x &= 0. \end{aligned}$$

Zatem funkcja  $f(x)$  posiada jedno miejsce zerowe, jest nim 0. Punkt przecięcia z osią pionową wyznaczamy obliczając  $f(0)$ , czyli mamy

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0}{0^2 + 1} = 0.$$

Podsumowując, funkcja  $f(x)$  przechodzi przez punkt  $(0,0)$ .

- Granice na “końcach dziedziny”

Wyznamy granice funkcji w  $-\infty$  i  $+\infty$ . Mamy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 0,$$

ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 + 0 = 1,$$

i stąd

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

Podobnie otrzymujemy, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 0.$$

- Asymptoty

Ponieważ mianownik nie ma miejsc zerowych, zatem brak asymptot pionowych.

Ponieważ granice  $f(x)$  w  $\pm\infty$  są stałe, istnieje asymptota pozioma  $y = 0$  ponieważ, jak obliczyliśmy wyżej, mamy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0,$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0.$$

Możemy również przekonać się o tym dokonując obliczeń dla asymptoty ukośnej czyli prostej o równaniu  $y = ax + b$ . Mamy

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x^2 + 1} = 0, \end{aligned}$$

oraz

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{2}{x^2 + 1} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x^2 + 1} = 0,$$

czyli prosta  $y = 0$  jest asymptotą (poziomą).

- Badanie pochodnej funkcji: ekstrema lokalne, monotoniczność

Mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x)' \cdot (x^2 + 1) - (x^2 + 1)' \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Dziedziną dla  $f'(x)$  jest również zbiór liczb rzeczywistych.

Wyznaczamy ekstrema lokalne: rozwiązujemy na początek równanie  $f'(x) = 0$ .

Mamy więc

$$\begin{aligned} \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} &= 0, \\ 2(1 - x^2) &= 0, \\ 2(1 - x)(1 + x) &= 0. \end{aligned}$$

Zatem  $f'(x) = 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $x = -1$  lub  $x = 1$ . Badamy czy pochodna w tych punktach zmienia znak rozwiązując nierówności  $f'(x) > 0$  i  $f'(x) < 0$ . Mamy więc

$$\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} > 0,$$

$$2(1-x^2)(x^2+1)^2 > 0,$$

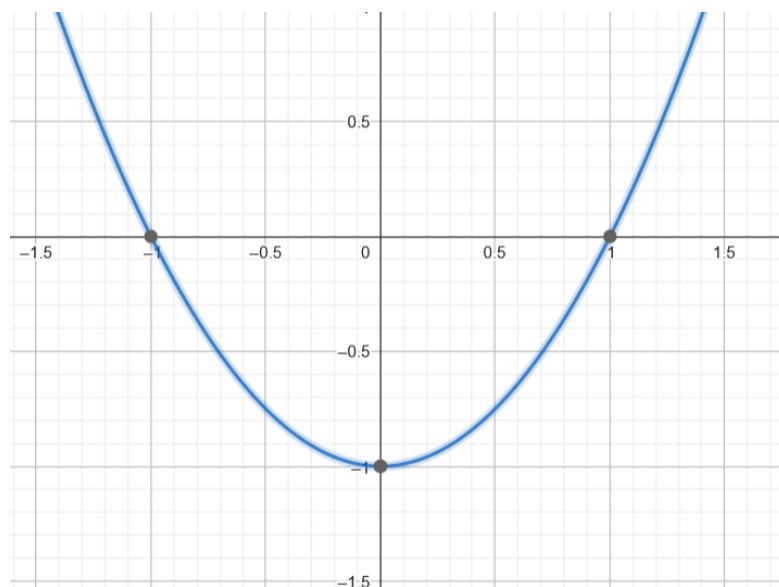
$$2(1-x)(1+x)(x^2+1)^2 > 0,$$

$$(x-1)(1+x)(x^2+1)^2 < 0.$$

Ponieważ  $x^2 + 1 > 0$  dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$  zatem po podzieleniu obu stron nierówności przez  $x^2 + 1$  otrzymujemy ostatecznie nierówność

$$(x-1)(x+1) < 0.$$

Szkic wykresy lewej strony nierówności wygląda następująco.



Zatem  $f'(x) > 0$  dla  $x \in (-1, 1)$ , zaś  $f'(x) < 0$  dla  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ . W punkcie  $x = -1$  pochodna  $f'(x)$  zmienia znak z ujemnego na dodatni, zatem w tym punkcie funkcja  $f(x)$  posiada minimum lokalne. Mamy

$$f(-1) = \frac{2 \cdot (-1)}{(-1)^2 + 1} = \frac{-2}{2} = -1.$$

W punkcie  $x = 1$  pochodna  $f'(x)$  zmienia znak z dodatniego na ujemny, zatem w tym punkcie funkcja  $f(x)$  posiada maksimum lokalne. Mamy

$$f(1) = \frac{2 \cdot 1}{(-1)^2 + 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Funkcja  $f(x)$  jest rosnąca w przedziale  $(-1,1)$ , zaś jest malejąca w przedziałach:  $(-\infty, -1)$ ,  $(1, +\infty)$ .

- Badanie drugiej pochodnej: wypukłość, wklęsłość

Mamy

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2(1-x^2))' \cdot (x^2+1)^2 - ((x^2+1)^2)' \cdot 2(1-x^2)}{((x^2+1)^2)^2} = \\ &= \frac{-4x \cdot (x^2+1)^2 - 2(x^2+1) \cdot 2x \cdot 2(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{-4x \cdot (x^2+1)(x^2+1+2(1-x^2))}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{-4x \cdot (x^2+1+2-2x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{-4x \cdot (3-x^2)}{(x^2+1)^3} = \\ &= \frac{4x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Badamy znak  $f''(x)$ . Mamy

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0 \\ \frac{4x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3} &> 0. \end{aligned}$$

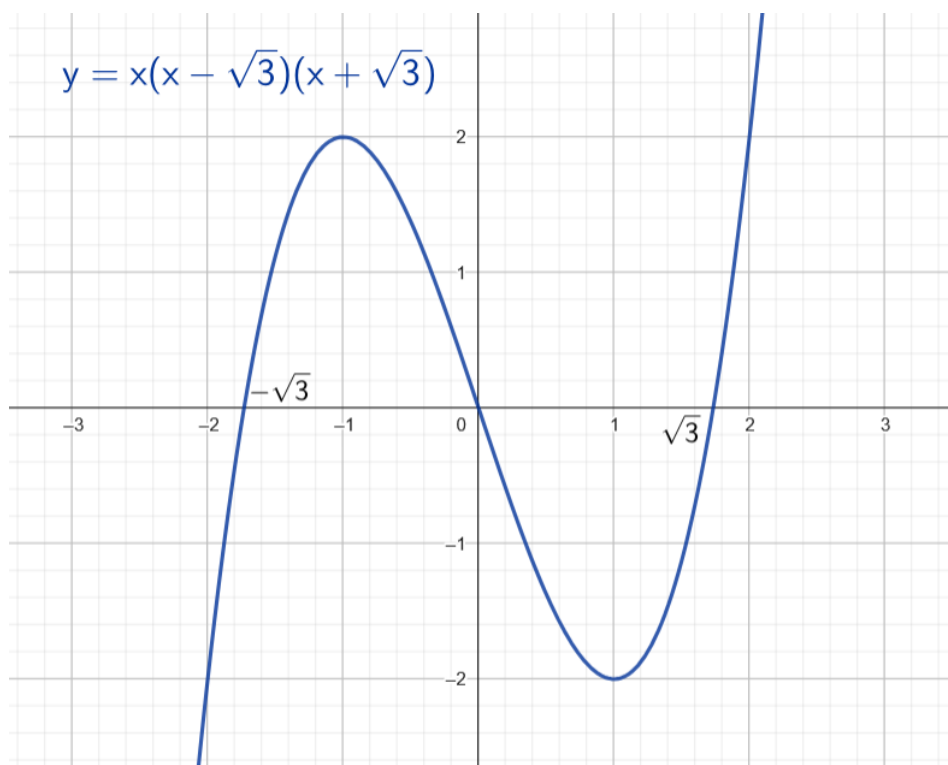
Stąd

$$4x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1)^3 > 0.$$

Ponieważ  $x^2+1 > 0$  zatem dzieląc obie strony nierówności przez to wyrażenie otrzymujemy

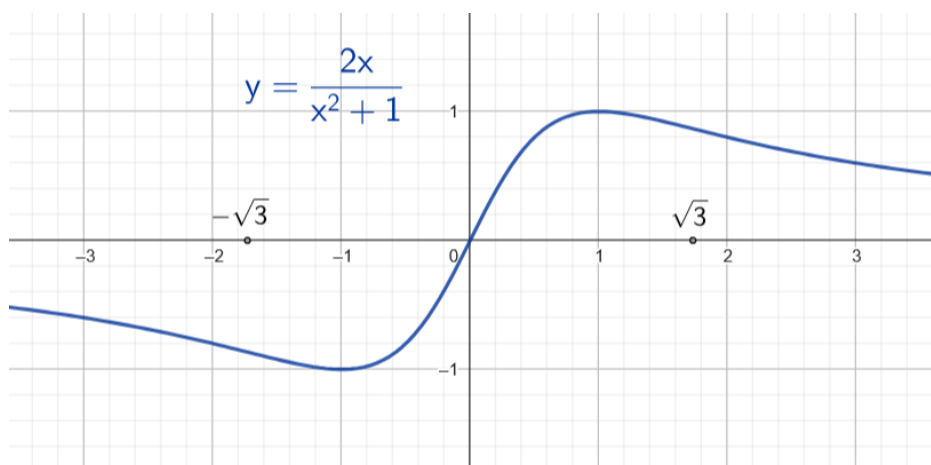
$$\begin{aligned} 4x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) &> 0, \\ x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) &> 0. \end{aligned}$$

Szkicujemy wykres lewej strony nierówności.



Stąd wynika, że  $f''(x) > 0$  dla  $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ , zatem  $f(x)$  jest wypukłą w przedziałach:  $(-\sqrt{3}, 0)$ ,  $(\sqrt{3}, +\infty)$ . Podobnie widzimy, że  $f''(x) < 0$  dla  $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ , zatem  $f(x)$  jest wklęsłą w przedziałach:  $(-\infty, -\sqrt{3})$ ,  $(0, \sqrt{3})$ . Punktami przegięcia są więc:  $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ .

Uwzględniając wszystkie powyższe obliczenia możemy naszkicować wykres funkcji  $f(x)$ .



## Pochodne cząstkowe funkcji dwóch zmiennych

### Zadanie

Oblicz pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego dla funkcji

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y},$$

gdzie  $y \neq 0$ .

### Rozwiązanie

Pochodną cząstkową funkcji  $f(x, y)$  względem zmiennej  $x$  czyli  $\frac{\partial f}{\partial x}$  obliczamy stosując zwykłe wzory na obliczanie pochodnych, traktując zmienną  $y$  jako stałą, czyli

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2}{y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{y} x^2 \right) = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x} (x^2) = \frac{1}{y} \cdot 2x = \frac{2x}{y}.$$

Pochodną cząstkową funkcji  $f(x, y)$  względem zmiennej  $y$  czyli  $\frac{\partial f}{\partial y}$  obliczamy stosując zwykłe wzory na obliczanie pochodnych, traktując e tym przypadku zmienną  $x$  jako stałą, czyli

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^2}{y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( x^2 \frac{1}{y} \right) = x^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y} \right) = x^2 \left( -\frac{1}{y^2} \right) = -\frac{x^2}{y^2}.$$

Pochodne rzędu drugiego dla funkcji  $f(x, y)$  obliczamy różniczkując każdą z pochodnych rzędu pierwszego po każdej zmiennej.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2x}{y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2}{y} \cdot x \right) = \frac{2}{y} \frac{\partial}{\partial x} (x) = \frac{2}{y}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{x^2}{y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -x^2 \cdot \frac{1}{y^2} \right) = -x^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y^2} \right) = \\ &= -x^2 \frac{\partial}{\partial y} (y^{-2}) = -x^2 \cdot (-2y^{-3}) = x^2 \left( \frac{2}{y^3} \right) = \frac{2x^2}{y^3}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2x}{y} \right) = 2x \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y} \right) = 2x \left( -\frac{1}{y^2} \right) = -\frac{2x}{y^2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x^2}{y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{y^2} x^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial x} (x^2) = -\frac{1}{y^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{y^2}. \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że pochodne "mieszane"  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  i  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  są równe w punktach, w których są funkcjami ciągłymi.

## Zadanie

Oblicz pochodne cząstkowe rzędu pierwszego dla funkcji

$$g(x, y) = e^{2xy^2+3x} \sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right),$$

gdzie  $x, y$  nie zerują się jednocześnie.

## Rozwiązanie

Postępujemy podobnie jak w poprzednim zadaniu, stosujemy wzór na pochodną iloczynu. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{2xy^2+3x} \sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (e^{2xy^2+3x}) \cdot \sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) + e^{2xy^2+3x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Następnie stosując wzór na pochodną funkcji złożonej oraz wzór na pochodną ilorazu otrzymujemy dalej

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= e^{2xy^2+3x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (2xy^2 + 3x) \cdot \sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) + \\ &+ e^{2xy^2+3x} \cdot \cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \\ &= e^{2xy^2+3x} \cdot (2y^2 + 3) \cdot \sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) + \\ &+ e^{2xy^2+3x} \cdot \cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial x}(xy) \cdot (x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) \cdot xy}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= e^{2xy^2+3x} \cdot (2y^2 + 3) \cdot \sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) + \\ &+ e^{2xy^2+3x} \cdot \cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{y \cdot (x^2+y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= e^{2xy^2+3x} \cdot (2y^2 + 3) \cdot \sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) + e^{2xy^2+3x} \cdot \cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{x^2y + y^3 - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= e^{2xy^2+3x} \cdot (2y^2 + 3) \cdot \sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) + e^{2xy^2+3x} \cdot \cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{y(x^2+y^2-2x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= e^{2xy^2+3x} \cdot (2y^2 + 3) \cdot \sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) + e^{2xy^2+3x} \cdot \cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Aby obliczyć  $\frac{\partial g}{\partial y}$  postępujemy analogicznie, różniczkujemy po zmiennej  $y$ . Mamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( e^{2xy^2+3x} \sin \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (e^{2xy^2+3x}) \cdot \sin \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right) + e^{2xy^2+3x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \sin \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right) \right).\end{aligned}$$

Dalej stosujemy wzór na pochodną funkcji złożonej oraz wzór na pochodną ilorazu i otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y} &= e^{2xy^2+3x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (2xy^2 + 3x) \cdot \sin \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right) + \\ &+ e^{2xy^2+3x} \cdot \cos \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \\ &= e^{2xy^2+3x} \cdot 4xy \cdot \sin \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right) + \\ &+ e^{2xy^2+3x} \cdot \cos \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right) \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial y} (xy) \cdot (x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial y} (x^2+y^2) \cdot xy}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= 4xy \cdot e^{2xy^2+3x} \cdot \sin \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right) + e^{2xy^2+3x} \cdot \cos \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right) \cdot \frac{y \cdot (x^2+y^2) - 2y \cdot xy}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= 4xy \cdot e^{2xy^2+3x} \cdot \sin \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right) + e^{2xy^2+3x} \cdot \cos \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right) \cdot \frac{x^2y + y^3 - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= 4xy \cdot e^{2xy^2+3x} \cdot \sin \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right) + e^{2xy^2+3x} \cdot \cos \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right) \cdot \frac{y(x^2+y^2-2xy)}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

### Zadanie

Oblicz pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego dla funkcji

$$f(x, y) = x^y, \quad x > 0.$$

### Rozwiązanie

Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln(x).$$

Obliczmy teraz pochodne cząstkowe rzędu drugiego. Mamy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (y \cdot x^{y-1}) = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (x^y \cdot \ln(x)) = \ln(x) \cdot \frac{\partial}{\partial y} (x^y) = \ln(x) \cdot x^y \cdot \ln(x) = x^y \cdot (\ln(x))^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot x^{y-1}) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \cdot \ln(x).$$

Obliczmy jeszcze drugą pochodną “mieszana” (w celu sprawdzenia równości pochodnych “mieszanych”)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x^y \cdot \ln(x)) = y \cdot x^{y-1} \cdot \ln(x) + x^y \cdot \frac{1}{x} = y \cdot x^{y-1} \cdot \ln(x) + x^{y-1}.$$

Oczywiście  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

### Zadanie

Wyznacz ekstrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - x + 4y - 5.$$

### Rozwiązanie

- Obliczamy pochodne cząstkowe rzędu pierwszego

Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 4y + 4.$$

- Wyznaczamy punkty stacjonarne

Punkty stacjonarne (czyli punkty, w których funkcja być może osiąga ekstremum lokalne) są rozwiązaniami układu równań

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

W naszym przypadku mamy więc układ równań

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -x + 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy, że  $y = 2x - 1$ . Wstawiając do drugiego równania  $2x - 1$  w miejsce  $y$  otrzymujemy

$$-x + 4(2x - 1) + 4 = 0,$$

$$-x + 8x - 4 + 4 = 0,$$

$$7x = 0.$$

Zatem  $x = 0$ . Stąd  $y = 2 \cdot 0 - 1 = -1$ . Funkcja  $f(x, y)$  posiada więc jeden punkt stacjonarny  $A(0, -1)$ .

- Sprawdzamy czy w punkcie stacjonarnym jest ekstremum lokalne.

Obliczmy pochodne cząstkowe rzędu drugiego. Mamy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1.$$

Obliczmy teraz wartości pochodnych rzędu drugiego w punkcie  $A(0, -1)$ . Zauważmy, że powyżej obliczone pochodne cząstkowe nie zależą od zmiennych, zatem w tym punkcie mamy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -1) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, -1) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, -1) = -1.$$

Zauważmy, że

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -1) = 2 > 0,$$

oraz

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, -1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, -1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, -1) \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot (-1) = 8 - 1 = 7 > 0.$$

Zatem funkcja  $f$  osiąga w punkcie  $A(0, -1)$  minimum lokalne. Wartość funkcji w tym punkcie wynosi

$$f(0, -1) = 0^2 - 0 \cdot (-1) + 2(-1)^2 - 0 + 4 \cdot (-1) - 5 = 2 - 4 - 5 = -7.$$