

MATERIAŁY DYDAKTYCZNE

do zajęć wyrównawczych z przedmiotu:

fizyka

dla studentów kierunku

Inżynieria Odnawialnych Źródeł Energii

Opracował:

Robert Borc

Lublin 2025 r.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.
Utwór dostępny jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe.

Ruch jednostajny prostoliniowy

Zadanie 1

Człowiek biegnąc z prędkością $v_1 = 12 \text{ km/h}$ pokonał drogę o długości s . Następnie taką samą drogę przeszedł z prędkością $v_2 = 5 \text{ km/h}$. Ostatnią część drogi o długości $2s$ przejechał na rowerze z prędkością $v_3 = 22 \text{ km/h}$. Oblicz średnią wartość prędkości człowieka na całej drodze.

Rozwiązanie

Wykorzystamy zależność opisującą średnią wartość prędkości:

$$v_{\text{sr}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3}.$$

Dla naszego zadania droga całkowita wynosi:

$$s_1 + s_2 + s_3 = s + s + 2s = 4s.$$

Korzystamy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnym: $S = V t$, skąd nasze czasy wynoszą odpowiednio:

$$t_1 = \frac{s}{v_1}, \quad t_2 = \frac{s}{v_2}, \quad t_3 = \frac{2s}{v_3}.$$

$$v_{\text{sr}} = \frac{4s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} + \frac{2s}{v_3}} = \frac{4}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{2}{v_3}}.$$

Podstawiamy wartości liczbowe i otrzymujemy ostateczny wynik:

$$v_{\text{sr}} = \frac{4}{\frac{1}{12 \text{ km/h}} + \frac{1}{5 \text{ km/h}} + \frac{2}{22 \text{ km/h}}} \approx 8,89 \text{ km/h}.$$

Zadanie 2

Dźwig kolejowy porusza się na szynach wzdłuż prostej. Wykres przedstawia prędkość dźwigu

$v \left[\frac{m}{s} \right]$ w funkcji czasu $t[s]$; $v = f(t)$.

A) Wykorzystując wykres, oblicz przemieszczenia Δx dźwigu dla poszczególnych faz ruchu.

B) Sporządź wykres zależności położenia dźwigu od czasu $x = f(t)$. Wykres zaczynamy od położenia i czasu równych zero.

C) Oblicz całkowite przemieszczenie i drogę dźwigu w ciągu całego czasu pracy.

D) Oblicz wartość prędkości średniej dźwigu oraz średnią wartość jego prędkości.

Rozwiązanie.

A) Przemieszczenia obliczamy ze wzoru: $\Delta x = v_x \cdot \Delta t$:

$$\Delta x_1 = 0,5 \frac{m}{s} \cdot 20 s = 10 m ,$$

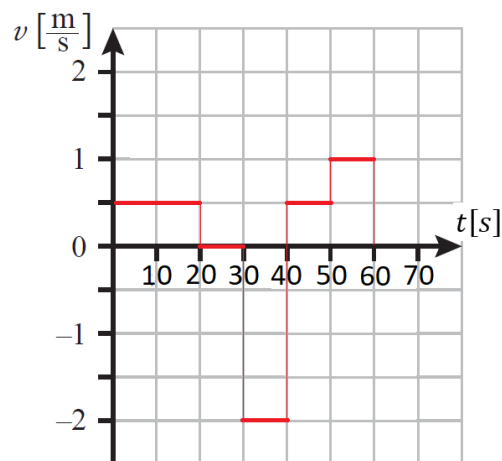
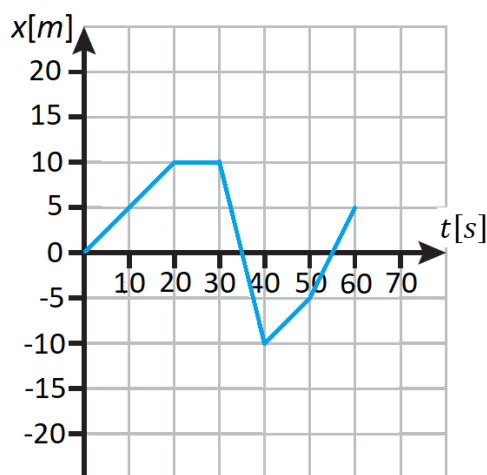
$$\Delta x_2 = 0 \frac{m}{s} \cdot 10 s = 0 m ,$$

$$\Delta x_3 = -2 \frac{m}{s} \cdot 10 s = -20 m ,$$

$$\Delta x_4 = 0,5 \frac{m}{s} \cdot 10 s = 5 m ,$$

$$\Delta x_5 = 1 \frac{m}{s} \cdot 10 s = 10 m ,$$

B)



C) Przemieszczenie całkowite dźwigu jest sumą przemieszczeń cząstkowych:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 + \Delta x_5$$

$$\Delta x = 10 \text{ m} + 0 \text{ m} - 20 \text{ m} + 5 \text{ m} + 10 \text{ m} = 5 \text{ m}$$

Droga musi być wartością dodatnią wyrażoną jako suma wartości bezwzględnych przemieszczeń:

$$s = 10 \text{ m} + 0 \text{ m} + 20 \text{ m} + 5 \text{ m} + 10 \text{ m} = 45 \text{ m}$$

D) Wartość prędkości średniej to wartość przemieszczenia całkowitego podzielona przez czas, w którym to przemieszczenie nastąpiło:

$$|v| = \frac{|\Delta x|}{t} = \frac{5 \text{ m}}{60 \text{ s}} = \frac{1}{12} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,0833 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Średnia wartość prędkości to droga podzielona przez czas, w którym ta droga została przebyta:

$$v_{sr} = \frac{s}{t} = \frac{45 \text{ m}}{60 \text{ s}} = \frac{3}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Zadanie 3

Motolotnia leci z prędkością $V = 90 \text{ km/h}$ względem powietrza. W planie ma przelot z miejscowości A do miejscowości B i z powrotem. Miejscowości oddalone są od siebie o odległość $S = 40 \text{ km}$. Ile czasu zajmie przelot tam i z powrotem: a) w bezwietrzny dzień b) gdy z B do A wieje wiatr z prędkością $V_w = 10 \text{ m/s}$ c) gdy wiatr wieje z prędkością $V_w = 10 \text{ m/s}$ prostopadle do kierunku lotu? d) gdy wiatr wieje z prędkością $V_w = 10 \text{ m/s}$ pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do kierunku lotu. Przyjmujemy, że lot motolotni odbywa się ze stałą prędkością wzdłuż prostej łączącej miejscowości A i B.?

Rozwiązanie

Szukane czasy przelotu oznaczmy odpowiednio: t_a, t_b, t_c, t_d .

a) Korzystamy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnym: $S = V t$, skąd dla naszego przypadku czas przelotu wynosi

$$t_a = \frac{2S}{V} = \frac{2 \cdot 40 \text{ km}}{90 \text{ km/h}} = \frac{8}{9} \text{ h}.$$

Czas wyrazimy w minutach $t_a = \frac{8}{9} 60 \text{ min} \approx 53,33 \text{ min}.$

b) W tym przypadku czas przelotu z miejscowości A do B różni się od czasu przelotu z B do A, więc nasz czas zapiszemy jako sumę dwóch czasów

$$t_b = t_{AB} + t_{BA}$$

W pierwszej fazie lotu motolotnia porusza się pod wiatr, czyli wektor prędkości wiatru jest skierowany przeciwnie do wektora prędkości motolotni. W drugiej fazie wektory prędkości się dodają. Całkowity czas przelotu wynosi

$$t_a = t_{AB} + t_{BA} = \frac{S}{V - V_w} + \frac{S}{V + V_w}.$$

W obliczeniach musimy ujednolicić jednostki, zatem prędkość motolotni wyrazimy w m/s a odległość w m

$$V = 90 \frac{km}{h} = \frac{90000 m}{3600 s} = 25 \frac{m}{s}.$$

Podstawiamy wartości liczbowe

$$t_a = \frac{40000 m}{25 \frac{m}{s} - 10 m/s} + \frac{40000 m}{25 \frac{m}{s} + 10 m/s} \approx 2667s + 1142s = 3809s.$$

$$t_a = \frac{3809 s}{60} = 63,5 min = 1h 3,5 min.$$

c) Dla lotu przy wietrze wiejącym pod kątem 90° do kierunku lotu, warunki są takie same dla obu kierunków przelotu czyli $t_{AB} = t_{BA}$. W związku z tym możemy napisać, że $t_c = 2t_{AB}$.

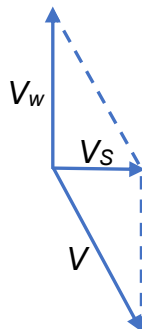
$t_{AB} = \frac{S}{V_S}$, gdzie V_S oznacza prędkość motolotni wzdłuż drogi S . Zatem

$$t_c = \frac{2S}{V_S}.$$

Prędkość V_S jest wypadkową prędkości V oraz V_w . W zapisie wektorowym

$$\vec{V}_S = \vec{V} + \vec{V}_w.$$

Aby obliczyć wartość tej prędkości ($|\vec{V}_S|$) posłużymy się rysunkiem.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa ($V^2 = V_w^2 + V_s^2$) wyznaczamy V_s

$$V_s = \sqrt{V^2 - V_w^2} . \quad \text{Ostatecznie}$$

$$t_c = \frac{2S}{\sqrt{V^2 - V_w^2}} = \frac{2 \cdot 40000}{\sqrt{25^2 - 10^2}} = \frac{80000}{\sqrt{525}} \approx 3491 \text{ s} .$$

Wyrazimy czas w minutach

$$t_c = \frac{3491}{60} = 58,18 \text{ min} .$$

Chcąc wyrazić czas w minutach i sekundach mnożymy liczbę całkowitą minut razy 60 i pozostały wynik odejmujemy od liczby wszystkich sekund. Otrzymamy wówczas liczbę sekund, które zapisujemy zamiast liczby dziesiętnej.

$$58 \cdot 60 \text{ s} - 3491 \text{ s} = 3480 \text{ s} - 3491 \text{ s} = 11 \text{ s}$$

Pozostałą liczbę sekund możemy także wyliczyć z proporcji

$$\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = \frac{x}{0,18 \text{ min}} \rightarrow x = \frac{60 \text{ s} \cdot 0,18 \text{ min}}{1 \text{ min}} = 10,8 \text{ s} \approx 11 \text{ s} .$$

Zatem

$$t_c = 58 \text{ min } 11 \text{ s} .$$

Zadanie 4

Między przystaniami A i B wzdłuż linii brzegowej rzeki kursuje statek. Jeżeli statek płynie w dół rzeki, to czas przebycia odległości między przystaniami wynosi $t_1 = 2 \text{ godz.}$, w przeciwnym kierunku czas pokonania tej odległości wynosi $t_2 = 2,5 \text{ godz.}$ Prędkość statku względem wody jest stała i wynosi $v_s = 20 \text{ km/h}$. Oblicz prędkość prądu w rzece oraz odległość między przystaniami.

Rozwiązanie

Oznaczmy L jako odległość między przystaniami oraz v_{rz} jako prędkość prądu w rzece.

Prędkość statku płynącego w dół rzeki będzie powiększona o wartość prędkości prądu w rzece. W tym wypadku pierwsze równanie na drogę w ruchu jednostajnym możemy zapisać:

$$L = t_1(v_s + v_{rz}) .$$

Dla przeciwnego kierunku mamy drugie równanie, które przybiera postać:

$$L = t_2(v_s - v_{rz}) .$$

Mamy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi L i v_{rz} , które chcemy wyznaczyć.

Chcąc wyznaczyć v_{rz} eliminujemy L tworząc jedno równanie:

$$t_1(v_s + v_{rz}) = t_2(v_s - v_{rz}) .$$

Z tego równania wyznaczamy v_{rz} :

$$t_1 v_s + t_1 v_{rz} = t_2 v_s - t_2 v_{rz} ,$$

$$t_1 v_{rz} + t_2 v_{rz} = t_2 v_s - t_1 v_s ,$$

$$v_{rz}(t_1 + t_2) = v_s(t_2 - t_1) ,$$

$$v_{rz} = \frac{v_s(t_2 - t_1)}{(t_1 + t_2)} .$$

Podstawiamy wartości liczbowe:

$$v_{rz} = \frac{20 \frac{km}{h} (2,5 h - 2 h)}{(2,5 h + 2 h)} = \frac{10 km}{4,5 h} \approx 2,22 \frac{km}{h} .$$

Chcąc obliczyć L podstawiamy do pierwszego lub drugiego równania dane oraz obliczoną powyżej prędkość prądu w rzece. Wykorzystamy pierwsze równanie:

$$L = t_1(v_s + v_{rz}) = 2 h \left(20 \frac{km}{h} + 2,22 \frac{km}{h} \right) = 44,44 km .$$

Napiszemy też ogólne równanie na odległość między przystaniami. W tym celu wyznaczamy z drugiego równania na drogę, prędkość v_{rz} , którą podstawiamy do równania pierwszego:

$$L = t_2(v_s - v_{rz}) \rightarrow v_{rz} = v_s - \frac{L}{t_2} ,$$

$$L = t_1 \left(v_s + v_s - \frac{L}{t_2} \right) = 2t_1 v_s - \frac{L t_1}{t_2} ,$$

$$L \left(1 + \frac{t_1}{t_2} \right) = 2t_1 v_s ,$$

$$L \left(\frac{t_2 + t_1}{t_2} \right) = 2t_1 v_s ,$$

$$L = \frac{2t_1 t_2 v_s}{t_2 + t_1} = \frac{200 \frac{h^2 km}{h}}{4,5 h} \approx 44,44 km .$$

Ruch jednostajnie przyspieszony

Zadanie 5

Z powierzchni ziemi wyrzucono pionowo do góry kamień. Oblicz prędkość wyrzutu kamienia jeżeli osiągnął on maksymalną wysokość $h = 8 \text{ m}$. Przyspieszenie ziemskie przyjmujemy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Rozwiązanie

Kamień porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym więc przyspieszenie g jest ujemne. Zapisujemy wzór na drogę h dla takiego ruchu:

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

gdzie v_0 to szukana prędkość wyrzutu.

Dodatkową niewiadomą jest czas, który należy wyznaczyć ze wzoru definiującego przyspieszenie: $a = \frac{\Delta v}{t}$, oznacza on stosunek przyrostu prędkości

$\Delta v = v_{\text{końcowa}} - v_{\text{początkowa}}$ do czasu t , w którym ten przyrost nastąpił. Dla naszego przypadku $a = g$, natomiast Przyrost prędkości wynosi v_0 gdyż prędkość w najwyższym punkcie wynosi zero, więc możemy zapisać:

$$g = \frac{v_0}{t} \rightarrow t = \frac{v_0}{g}.$$

Ostatni wzór na czas podstawiamy do równania na h :

$$h = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Podstawiamy wartości liczbowe:

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8 \text{ m}} \approx 12,65 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Zadanie to można również rozwiązać stosując zasadę zachowania energii mechanicznej. Energia kinetyczna kamienia w chwili wyrzutu równa jest energii potencjalnej na wysokości h , na której prędkość wynosi zero.

$$E_K = E_P,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh$$

Stąd po skróceniu masy i przekształceniu na v_0 otrzymujemy ostatecznie identyczne

rozwiązanie:

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Zadanie 6

Dwa ciała zrzucano swobodnie z pewnej wysokości. Drugie ciało zrzucano po czasie $\Delta t = 2 \text{ s}$ od momentu zrzucenia pierwszego ciała. Jaka jest odległość między ciałami po czasie $t_2 = 5 \text{ s}$ od momentu zrzutu drugiego ciała? Przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Rozwiązanie

Interesujące nas czasy spadania ciał to:

ciała pierwszego $t_1 = \Delta t + t_2 = 2 \text{ s} + 5 \text{ s} = 7 \text{ s}$,

ciała drugiego $t_2 = 5 \text{ s}$.

Szukana odległość między ciałami jest różnicą ich dróg:

$$\Delta h = h_1 - h_2.$$

Drogi te wynoszą odpowiednio:

$$h_1 = \frac{gt_1^2}{2}, \quad h_2 = \frac{gt_2^2}{2}$$

Podstawiając do równania otrzymujemy ostatecznie:

$$\Delta h = \frac{gt_1^2}{2} - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{g}{2}(t_1^2 - t_2^2).$$

Podstawiamy wartości liczbowe:

$$\Delta h = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} ((7\text{s})^2 - (5\text{s})^2) = 120 \text{ m}.$$

Zadanie 7

Rakieta startując pionowo z ziemi porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym. W piętnastej sekundzie od chwili startu ($t = 15 \text{ s}$) rakieta osiągnęła wysokość $h = 450 \text{ m}$. Wyznacz przeciążenie (w liczbie przyspieszeń ziemskich) jakie odczuwa kosmonauta w rakiecie. Przyjmujemy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Rozwiązanie

Przeciążenie oznaczmy jako P_g i wyznaczmy według wzoru:

$$P_g = \frac{g + a}{g} = 1 + \frac{a}{g} ,$$

Gdzie a to przyspieszenie rakiety.

Przyspieszenie to wyznaczamy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej:

$$h = \frac{at^2}{2} \quad \rightarrow \quad a = \frac{2h}{t^2} .$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$a = \frac{2 \cdot 450 \text{ m}}{(15 \text{ s})^2} = \frac{900 \text{ m}}{225 \text{ s}^2} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} .$$

Ostatecznie obliczamy przeciążenie:

$$P_g = 1 + \frac{40 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5$$

Zadanie 8

Wagon jedzie z prędkością $v_0 = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a następnie zjeżdża z góry ze stałym przyspieszeniem $a = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Długość stoku góry wynosi $s = 400 \text{ m}$. Ile czasu trwał zjazd wagonu ze stoku oraz jaka była jego prędkość końcowa u podnóża góry?

Rozwiązanie

Korzystamy z zależności na drogę i prędkość końcową w ruchu jednostajnie zmiennym:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$v_k = v_0 + at$$

Z drugiego równania wyznaczamy czas t potrzebny na osiągnięcie prędkości końcowej:

$$t = \frac{v_k - v_0}{a}$$

i wstawiamy do pierwszego równania na drogę:

$$s = v_0 \frac{v_k - v_0}{a} + \frac{a \left(\frac{v_k - v_0}{a} \right)^2}{2} .$$

Z równania chcemy wyznaczyć prędkość końcową

$$2as = 2v_0v_k - 2v_0^2 + a^2 \frac{(v_k - v_0)^2}{a^2}$$

$$2as = 2v_0v_k - 2v_0^2 + v_k^2 - 2v_0v_k + v_0^2$$

$$2as = -v_0^2 + v_k^2$$

$$v_k^2 = v_0^2 + 2as$$

$$v_k = \sqrt{v_0^2 + 2as} .$$

Podstawiamy dane liczbowe wyrażając v_0 w m/s :

$$v_0 = 40 \frac{km}{h} = \frac{40000 m}{3600 s} = \frac{100 m}{9 s} \approx 11,1 \frac{m}{s}$$

$$v_k = \sqrt{(11,1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot 400} \approx 30,4 \frac{m}{s}$$

Czas rozpędzającego się w ciągu możemy obliczyć ze wzoru na przyspieszenie:

$$a = \frac{v_k - v_0}{t}$$

$$t = \frac{v_k - v_0}{a} = \frac{30,4 \frac{m}{s} - 11,1 \frac{m}{s}}{1 \frac{m}{s^2}} = 19,3 s .$$

Ruch krzywoliniowy

Zadanie 9

Wiatrak turbiny wiatrowej obraca się z częstością $n = 20 \text{ obr/min}$. Oblicz prędkość linową końcówek łopat jeżeli promień każdej z łopat wynosi $R = 30 \text{ m}$.

Rozwiązanie

Prędkość wyrażamy jako stosunek drogi do czasu. Dla ruchu po okręgu drogą jest obwód okręgu a czasem jest okres T czyli czas wykonania pełnego obiegu:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Częstotliwość wyrażoną jako liczba obrotów na sekundę zapisujemy:

$$f = \frac{1}{T} .$$

Zestawiając te dwa wzory, możemy napisać:

$$v = 2\pi Rf .$$

Minuta ma 60 sekund, więc częstotliwość wyrażamy jako:

$$f = \frac{n}{60}.$$

Podstawiając do poprzedniego wzoru otrzymujemy ostatecznie:

$$v = \frac{2\pi Rn}{60} = \frac{\pi Rn}{30}$$

Podstawiamy dane liczbowe:

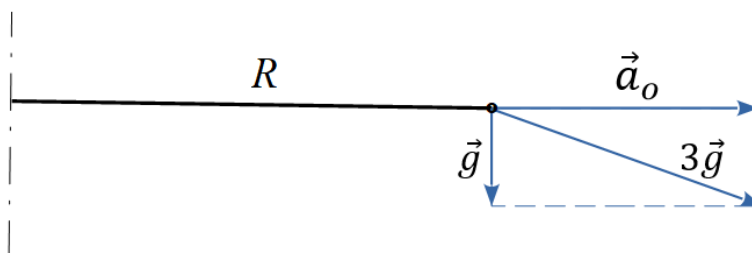
$$v = \frac{3,14 \cdot 30 \cdot 20}{30} = 62,8 \frac{m}{s} \approx 226,1 \frac{km}{h}.$$

Zadanie 10

Wirówka służąca do treningów kosmonautów wiruje ze stałą prędkością tak, że człowiek siedzący na krzeselku odczuwa przeciążenie odpowiadające trzykrotnej wartości przyspieszenia ziemskiego. Obliczyć wartość liniową prędkości kosmonauty oraz liczbę obrotów na minutę jaką wykonuje wirówka. Krzeselko jest umieszczone 8 m od osi obrotu ($R = 8 \text{ m}$). Przyspieszenie ziemskie przyjmujemy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Rozwiązanie

Wektory przyspieszeń jakimi poddawany jest kosmonauta obrazuje rysunek.



Wektor przyspieszenia $3\vec{g}$ jest wypadkową wektora przyspieszenia ziemskiego $\vec{g}$ i przyspieszenia odśrodkowego $\vec{a}_o$:

$$3\vec{g} = \vec{g} + \vec{a}_o$$

Aby obliczyć prędkość korzystamy ze wzoru na przyspieszenie odśrodkowe w ruchu po okręgu:

$$a_o = \frac{v^2}{R} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{a_o R}$$

Przyspieszenie wyznaczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$(3g)^2 = g^2 + a_o^2$$

$$a_o = \sqrt{9g^2 - g^2}$$

$$a_o = \sqrt{8g^2}$$

$$a_o = g\sqrt{8}.$$

Wyznaczone a_o podstawiamy do wzoru na prędkość:

$$v = \sqrt{gR\sqrt{8}} = \sqrt{gR} \sqrt[4]{8}$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$v = \sqrt{10 \cdot 8} \sqrt[4]{8} \approx 15,0 \frac{m}{s}$$

Ilość obrotów na minutę oznaczamy jako n . Aby obliczyć tę wielkość stosujemy zależności stosowane w poprzednim zadaniu:

$$v = 2\pi Rf, \quad f = \frac{n}{60}.$$

$$v = \frac{\pi Rn}{30}$$

Z tego równania wyznaczamy n :

$$n = \frac{30v}{\pi R}$$

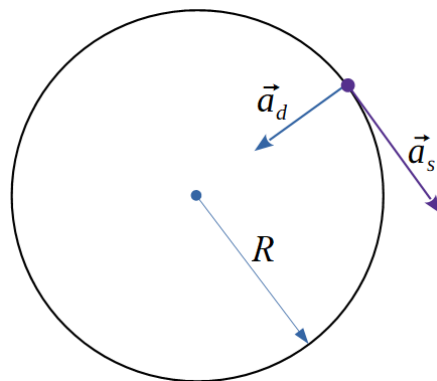
$$n = \frac{30 \cdot 15}{\pi \cdot 8} \approx 17,9 \frac{1}{min}$$

Zadanie 11

Kolejka w lunaparku porusza się ze stałym przyspieszeniem $a_s = 0,4 m/s^2$. Tor, po którym porusza się kolejka ma kształt okręgu o promieniu $R = 10 m$. Po jakim czasie od chwili rozpoczęcia ruchu, wartość przyspieszenia dośrodkowego będzie 4 razy większa od wartości przyspieszenia a_s ? Oblicz także prędkość liniową kolejki w trakcie osiągnięcia tego czasu.

Rozwiązanie

Przyspieszenie a_s jest przyspieszeniem stycznym w ruchu po okręgu, natomiast przyspieszenie dośrodkowe oznaczone jako a_d jest skierowane do środka okręgu (patrz rysunek).



Prędkość kolejki wzrasta powodując wzrost przyspieszenia dośrodkowego, prędkość tę wyrażamy wzorem:

$$v = a_s \cdot t .$$

Przyspieszenie dośrodkowe:

$$a_d = \frac{v^2}{R}$$

Podstawiamy prędkość z pierwszego równania do równania drugiego:

$$a_d = \frac{a_s^2 t^2}{R}$$

Z treści zadania wynika, że $a_d = 4a_s$, więc możemy napisać:

$$4a_s = \frac{a_s^2 t^2}{R}$$

$$4 = \frac{a_s t^2}{R}$$

$$t = 2 \cdot \sqrt{\frac{R}{a_s}} .$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$t = 2 \cdot \sqrt{\frac{10 \text{ m}}{0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 10 \text{ s} .$$

Obliczamy prędkość liniową:

$$v = a_s \cdot t = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ s} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Zadanie 12

Pocisk wystrzelony z ziemi pod kątem α do powierzchni ziemi osiągnął odległość s .

13



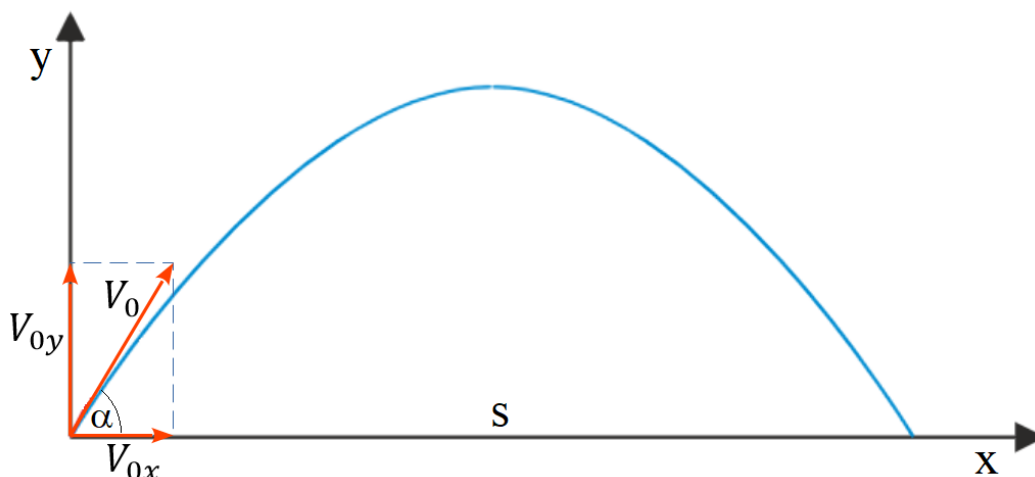
This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.
Utwór dostępny jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe.

Oblicz prędkość początkową pocisku. Przyspieszenie ziemskie wynosi g . Nie uwzględniamy oporu powietrza.

Rozwiązanie

Prędkość początkową pocisku V_0 rozkładamy na dwie składowe; poziomą V_{0x} i pionową V_{0y} (rysunek). Prędkość V_{0y} jest początkową prędkością ciała podrzuconego pionowo do góry, które porusza się z przyspieszeniem g . Czas wznoszenia się ciała wynosi:

$$t = \frac{V_{0y}}{g}.$$



Prędkość V_{0y} jest prędkością ciała w ruchu jednostajnym, czyli pozostaje ona niezmienna dla całego czasu przelotu. Całkowity czas lotu pocisku jest sumą czasów wznoszenia i spadania, które są sobie równe, możemy więc zapisać wzór na drogę:

$$s = V_{0x} \cdot 2t.$$

Podstawiając czas z pierwszego wzoru, otrzymujemy:

$$s = \frac{2V_{0x}V_{0y}}{g}.$$

Prędkości V_{0x} i V_{0y} możemy wyrazić przez prędkość V_0 i kąt α :

$$V_{0y} = V_0 \sin \alpha, \quad V_{0x} = V_0 \cos \alpha.$$

Podstawiając te zależności do wzoru na czas, otrzymujemy:

$$s = \frac{V_0^2}{g} 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha .$$

Z zależności trygonometrycznych wiemy że: $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$, więc:

$$s = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha .$$

Z tego ostatecznie obliczamy V_0 :

$$V_0 = \sqrt{\frac{sg}{\sin 2\alpha}} .$$

Zadanie 13

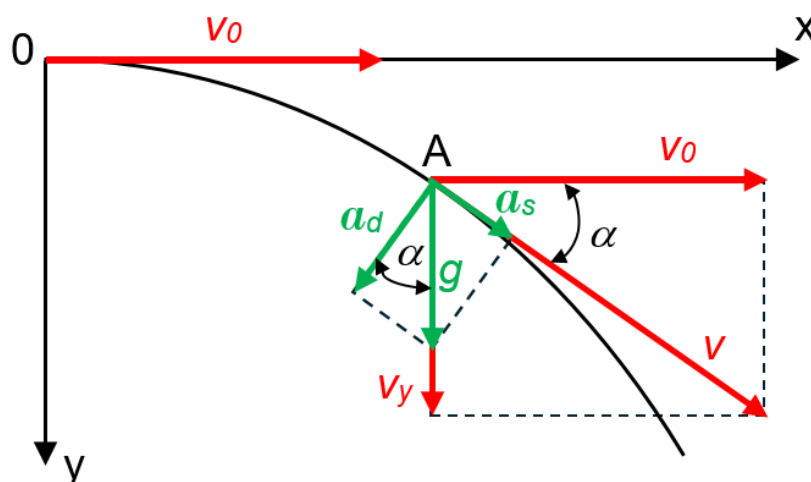
Samolot lecący poziomo z prędkością $v_0 = 60 \text{ m/s}$ zrzuca ładunek. Wyznaczyć promień krzywizny toru ładunku w punkcie, w którym się znajdzie po upływie $t = 5 \text{ s}$ od momentu zrzutu. Przyspieszenie ziemskie przyjmujemy $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Rozwiązanie

Promień krzywizny wyznaczmy ze wzoru na przyspieszenie dośrodkowe:

$$a_d = \frac{v^2}{R} \quad \rightarrow \quad R = \frac{v^2}{a_d}$$

Zrzuty ładunek bierze udział jednocześnie w dwóch ruchach wzajemnie prostopadłych: w ruchu poziomym wzdłuż osi x ze stałą prędkością V_0 i w swobodnym spadaniu wzdłuż osi y z prędkością $V_y = gt$. Rozkład wektorów prędkości (kolor czerwony) i przyspieszeń (kolor zielony) w rozpatrywanym punkcie A przedstawiony jest na rysunku.



Wartość wektora prędkości stycznej do toru v wyznaczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$v^2 = v_0^2 + v_y^2$$

$$v^2 = v_0^2 + g^2 t^2$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

Na rysunku zaznaczono takie same kąty α w trójkątach prostokątnych wektorów prędkości i przyspieszeń. Na podstawie tego można stwierdzić, że są one trójkątami podobnymi, dla których układamy równanie stosunków boków:

$$\frac{v_0}{v} = \frac{a_d}{g}$$

Do wzoru podstawiamy wyznaczone uprzednio wielkości:

$$\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{\frac{v^2}{R}}{g}$$

Z równania wyznaczamy R :

$$R = \frac{v^2 \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}{g v_0}$$

v^2 jest wielkością wyznaczoną uprzednio z twierdzenia Pitagorasa, którą podstawiamy otrzymując ostateczne równanie:

$$R = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2) \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}{g v_0} \quad \text{lub} \quad R = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}{g v_0}$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy:

$$R = \frac{(60^2 + 9,81^2 \cdot 5^2)^{\frac{3}{2}}}{9,81 \cdot 60} \approx 385,7 \text{ m}.$$

Dynamika

Zadanie 14

Na ciało o masie $m = 6 \text{ kg}$ działa stała siła. W ciągu $t = 3 \text{ s}$ wartość prędkości ciała wzrosła z $v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ do $v_2 = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz tą siłę.

Rozwiązanie

Wykorzystujemy drugą zasadę dynamiki Newtona:

$$F = m \cdot a ,$$

w której przyspieszenie definiujemy jako przyrost prędkości w czasie:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t} .$$

Podstawiamy drugi wzór do pierwszego i obliczamy otrzymując ostateczną odpowiedź:

$$F = \frac{m(v_2 - v_1)}{t} .$$

$$F = \frac{6 \text{ kg} \cdot \left(9 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{3 \text{ s}} = 10 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} , [N] .$$

Zadanie 15

Dwa ciała jedno o masie $M = 0,5 \text{ kg}$ a drugie o masie $m = 0,2 \text{ kg}$ są zawieszone na linie przerzuconej przez bloczek. Wiedząc, że przyspieszenie ziemskie $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ obliczyć:

- przyspieszenie z jakim poruszają się ciała,
- siłę napinającą linkę,
- siłę nacisku na oś bloczka F_N .

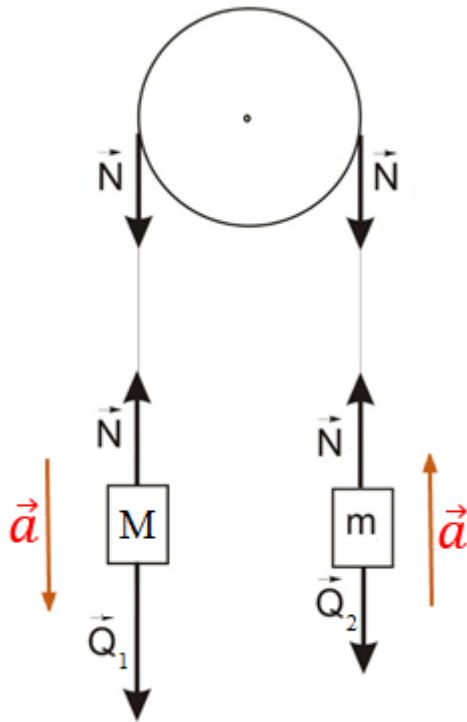
Nie uwzględniamy oporów ruchu oraz mas bloczka i linek.

Rozwiązanie

Na rysunku a przedstawiony jest układ sił i zwroty przyspieszeń. Siły $\vec{Q}_1$ i $\vec{Q}_2$ to ciężary ciał, natomiast $\vec{N}$ to siły napinające linkę (naprężenie linki). Jest to ta sama linka, więc mają one takie same wartości w każdym punkcie zarówno na styku ciał jak i bloczka. Układ jest niezrównoważony ($M > m$), więc porusza się z przyspieszeniem, którego zwroty wyznaczają czerwone strzałki.

Dla takiego układu można napisać:

$$|\vec{Q}_1| > |\vec{N}| > |\vec{Q}_2|$$



Rys. a

Rys. b

Drugą zasadę dynamiki Newtona możemy zapisać dla ciał o masie M i m , odpowiednio:

$$\vec{Q}_1 + \vec{N} = M \cdot \vec{a} \quad \vec{Q}_2 + \vec{N} = m \cdot \vec{a}$$

Wiedząc, że $Q_1 = M \cdot g$ oraz $Q_2 = m \cdot g$ oraz stosując zasadę, zgodnie z którą zwrot siły zgodny ze zwrotem przyspieszenia daje nam siłę dodatnią i odwrotnie, napiszemy równania w postaci skalarnej:

$$Mg - N = Ma \quad (1)$$

$$N - mg = ma \quad (2)$$

Jest to układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi a i N , który trzeba rozwiązać. Chcąc wyznaczyć a , z drugiego równania wyznaczamy N i podstawiamy do równania pierwszego:

$$N = ma + mg \quad (3)$$

$$Mg - ma - mg = Ma$$

$$Ma + ma = Mg - mg$$

$$a(M + m) = g(M - m)$$

$$a = \frac{g(M - m)}{M + m} . \quad (4)$$

Podstawiamy dane i obliczamy przyspieszenie:

$$a = \frac{9,8 \frac{m}{s^2} (0,5 \text{ kg} - 0,2 \text{ kg})}{0,5 \text{ kg} + 0,2 \text{ kg}} = 4,2 \frac{m}{s^2} .$$

Równanie na siłę napinającą linkę N , wyznaczamy z trzeciego równania do którego podstawiamy równanie (4):

$$\begin{aligned} N &= m \frac{g(M - m)}{M + m} + mg \\ N &= mg \left(\frac{M - m}{M + m} + 1 \right) \\ N &= mg \left(\frac{M - m + M + m}{M + m} \right) \\ N &= \frac{2mMg}{M + m} . \end{aligned} \quad (5)$$

Aby obliczyć N wygodniej posłużyć się równaniem (3):

$$N = m(a + g) = 0,2 \text{ kg} (4,2 + 9,8) \frac{m}{s^2} = 2,8 \text{ N} .$$

Siłę nacisku na oś bloczka wyznaczamy posługując się rysunkiem b.

$$\begin{aligned} F_N &= N + N = 2N \\ F_N &= 2 \cdot 2,8 \text{ N} = 5,6 \text{ N} \end{aligned}$$

Możemy także przedstawić ją za pomocą wzoru wykorzystując równanie (5):

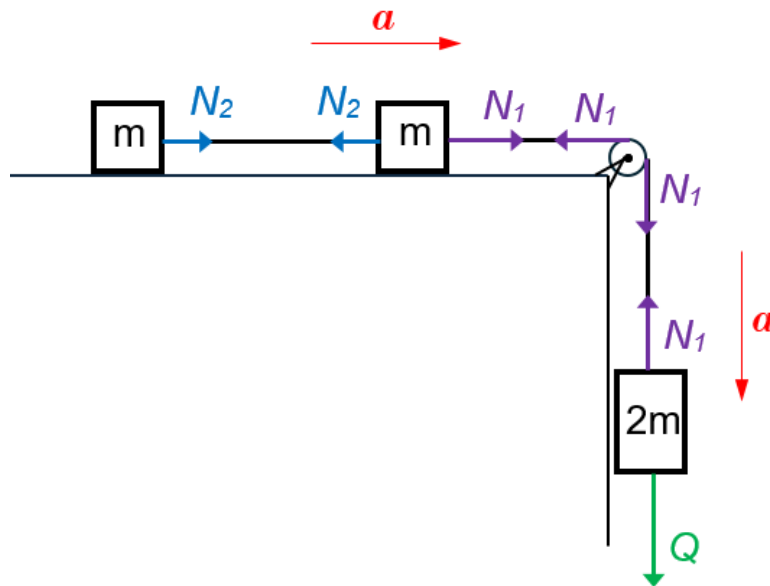
$$N = \frac{4mMg}{M + m} .$$

Zadanie 16

Na poziomym stole znajdują się dwa ciała powiązane nicią o masie m każde. Trzecie ciało o masie $2m$ zawieszono na nitce przerzuconej przez bloczek znajdujący się na krawędzi stołu i przywiązanej do jednego z ciał znajdujących się na stole. Oblicz: a) przyspieszenie ciał (a), b) siły napinające obie nici (N_1 i N_2), c) siłę nacisku na oś bloczka (F_N). Masę bloczka, nici, oraz tarcie zaniedbujemy. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Rozwiązanie

Wszystkie siły działające wzdłuż ruchu jak i kierunki przyspieszenia zaznaczono na rysunku. Siła Q to ciężar ciała o masie $2m$.



Dla każdego ciała napiszemy równanie przedstawiające drugą zasadę dynamiki Newtona. W równaniu tym, siły które są przeciwne do kierunku przyspieszenia będą ujemne:

$$N_2 = ma \quad (1)$$

$$N_1 - N_2 = ma \quad (2)$$

$$Q - N_1 = 2ma \quad (3)$$

Jest to układ trzech równań z trzema niewiadomymi; N_1 , N_2 oraz a . Ciężar $Q = 2mg$ składa się ze znanych wielkości. Jako pierwsze wyznaczmy przyspieszenie, w tym celu pierwsze równanie podstawimy do drugiego a drugie do trzeciego:

$$N_1 - ma = ma$$

$$N_1 = 2ma \quad (4)$$

$$Q - 2ma = 2ma$$

$$Q = 4ma$$

Podstawiamy za Q i ostatecznie wyznaczamy a :

$$2mg = 4ma$$

$$a = \frac{g}{2}$$

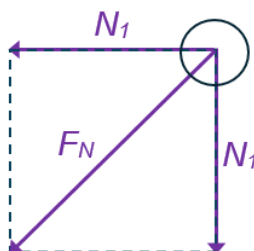
Wyznaczone przyspieszenie podstawiamy do równania (1) wyznaczając N_2 :

$$N_2 = \frac{mg}{2}$$

Podstawiając wyznaczone przyspieszenie do równania (4), wyznaczamy N_1 :

$$N_1 = \frac{2mg}{2} = mg$$

Siłą nacisku na oś bloczka jest wypadkowa sił naciągu nici N_1 przyłożonych do bloczka co przedstawia poniższy rysunek:



F_N jest przekątną kwadratu o boku N_1 . Możemy ją wyznaczyć z twierdzenia Pitagorasa:

$$F_N^2 = N_1^2 + N_1^2$$

$$F_N = N_1\sqrt{2}.$$

Do równania wstawiamy wyznaczone uprzednio N_1 i otrzymujemy ostatecznie:

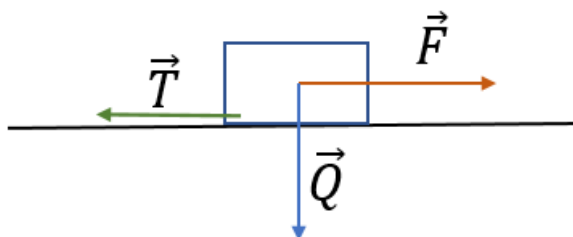
$$F_N = mg\sqrt{2}.$$

Zadanie 17

Na ciało o masie $m = 1 \text{ kg}$ umieszczone na stole działa poziomo skierowana siła $F = 12 \text{ N}$. Współczynnik tarcia między ciałem a powierzchnią stołu wynosi $\mu = 0,2$. Oblicz przyspieszenie z jakim porusza się ciało. Przyjmujemy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Rozwiązanie

Rozkład sił bez uwzględnienia reakcji podłoża przedstawia rysunek.



Piszemy równanie wektorowe drugiej zasady dynamiki Newtona wzdłuż ruchu ciała:

$$\vec{F} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

Siła tarcia $\vec{T}$ przeciwdziała sile $\vec{F}$, powodującej przyspieszenie, więc skalarnie

równanie to ma postać:

$$F - T = ma$$

Siła tarcia:

$$T = \mu \cdot Q$$

gdzie Q jest siłą nacisku i wynosi:

$$Q = m \cdot g$$

Wiążąc ze sobą te trzy równania, otrzymujemy:

$$F - \mu mg = ma$$

Stąd wyznaczamy przyspieszenie:

$$a = \frac{F - \mu mg}{m}$$

Podstawiamy dane obliczając przyspieszenie:

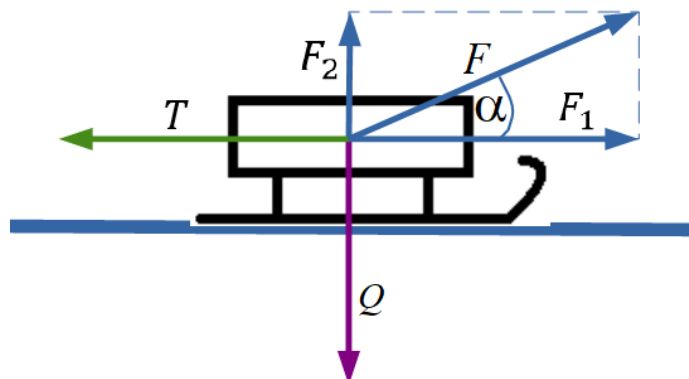
$$a = \frac{12 \text{ N} - 0,2 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ kg}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Zadanie 18

Oblicz siłę z jaką chłopiec ciągnie sanie o masie $m = 40 \text{ kg}$. Siła jest skierowana pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do powierzchni ziemi. Współczynnik tarcia sani o lód wynosi $\mu = 0,2$. Przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ a sanie poruszają się ruchem jednostajnym.

Rozwiązanie

Rozkład sił bez uwzględnienia reakcji podłoża przedstawia rysunek, na którym T to siła tarcia, Q jest siłą ciężkości a F_1 i F_2 to składowe siły F , którą mamy wyznaczyć.



Aby sanki poruszały się ruchem jednostajnym (ze stałą prędkością) siły działające na sanki muszą się równoważyć. Nas interesuje przypadek równowagi sił działających wzdłuż ruchu czyli:

$$F_1 = T \quad (1)$$

Siłę F_1 wyznaczmy z trójkąta prostokątnego:

$$F_1 = F \cos \alpha .$$

Siła tarcia T to iloczyn współczynnika tarcia i siły nacisku. Siłą nacisku (oznaczymy ją jako F_N) jest ciężar sanek Q pomniejszony o siłę F_1 :

$$F_N = Q - F_2 ,$$

gdzie:

$$Q = mg , \quad F_2 = F \sin \alpha .$$

Czyli siła tarcia wynosi:

$$T = \mu(mg - F \sin \alpha)$$

Ostatecznie równanie (1) wyrażamy:

$$F \cos \alpha = \mu(mg - F \sin \alpha)$$

Z równania tego wyznaczamy F :

$$F \cos \alpha = \mu mg - \mu F \sin \alpha$$

$$F \cos \alpha + \mu F \sin \alpha = \mu mg$$

$$F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = \mu mg$$

$$F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

Podstawiamy do wzoru dane liczbowe:

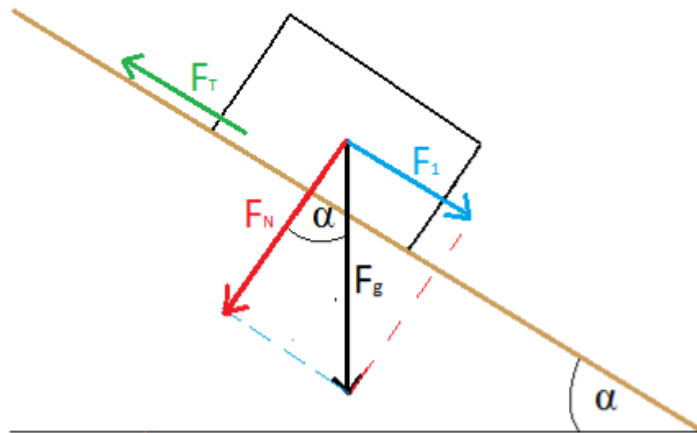
$$F = \frac{0,1 \cdot 40 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\cos 30^\circ + 0,1 \cdot \sin 30^\circ} = \frac{40 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,1 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{80 \text{ N}}{\sqrt{3} + 0,1} \approx 21,83 \text{ N} .$$

Zadanie 19

Skrzynia została umieszczona na desce. Jeden koniec deski uniesiono do góry natomiast drugi koniec pozostaje oparty o podłogę. Oblicz maksymalny kąt jaki tworzy deska z podłogą, dla którego skrzynia jeszcze nie zsuwa się z deski. Współczynnik tarcia statycznego między deską a skrzynią wynosi $\mu = 0,65$.

Rozwiązanie

Rozkład sił bez uwzględnienia reakcji podłoża przedstawia rysunek. Na rysunku F_T to siła tarcia, F_g jest siłą ciężkości a F_1 i F_N to składowe tej siły.



Warunek występujący w zadaniu występuje wtedy gdy siła zsuwająca F_1 równa jest sile tarcia F_T : $F_1 = F_T$

Siły F_1 i F_N wyznaczamy z trójkąta prostokątnego:

$$F_1 = F_g \sin \alpha, \quad F_N = F_g \cos \alpha$$

Siła tarcia F_T to iloczyn współczynnika tarcia μ i siły nacisku F_N :

$$F_T = \mu F_N = \mu F_g \cos \alpha.$$

Podstawiamy do równania $F_1 = F_T$.

$$F_g \sin \alpha = \mu F_g \cos \alpha.$$

Skracamy F_g i otrzymujemy:

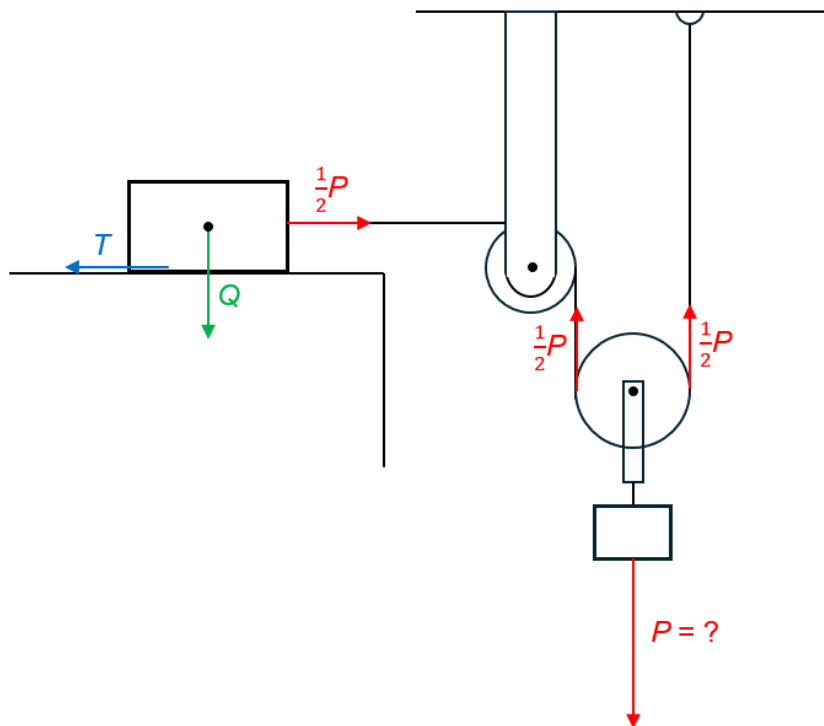
$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \mu \quad \rightarrow \quad \tan \alpha = \mu$$

$$\tan \alpha = 0,65$$

$$\alpha \approx 33^\circ$$

Zadanie 20

Oblicz jaki ciężar P należy zawiesić na bloczku (rys.) aby ruszyć z miejsca skrzynię o ciężarze $Q = 500 \text{ N}$ jeżeli wiadomo, że współczynnik tarcia statycznego skrzyni o poziomą powierzchnię wynosi $\mu = 0,2$.



Rozwiązanie

Zgodnie z rysunkiem na ciało od linki siła $(1/2)P$. Aby warunek był spełniony, siła tarcia musi się równać sile ciągnącej:

$$T = \frac{1}{2}P$$

Siła tarcia to iloczyn współczynnika tarcia i siły nacisku:

$$T = \mu Q$$

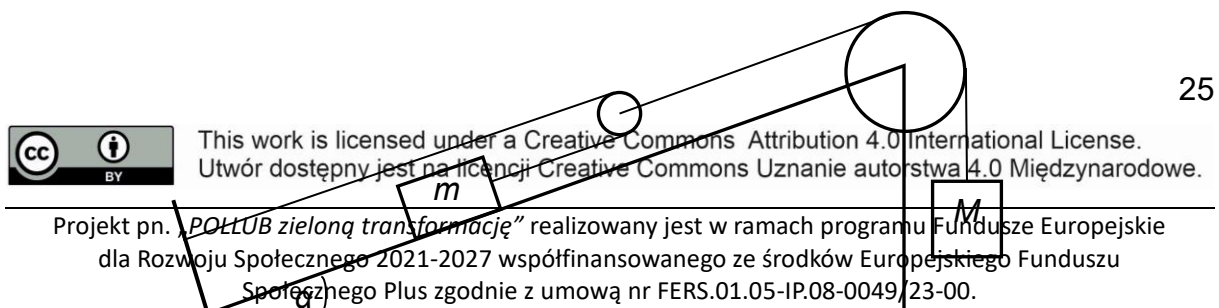
$$\mu Q = \frac{1}{2}P$$

$$P = 2\mu Q$$

$$P = 2 \cdot 0,2 \cdot 500N = 0,2 \cdot 1000N = 200N.$$

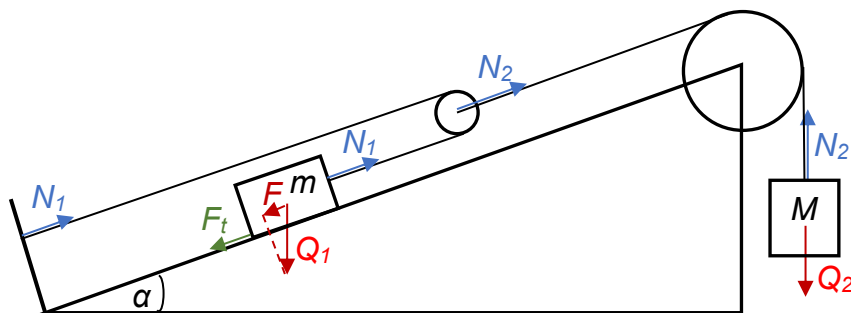
Zadanie 21

W układzie jak na rysunku mamy układ dwóch mas m i M . Dana jest masa $m = 12\text{ kg}$ oraz kąt $\alpha = 30^\circ$. Współczynnik tarcia statycznego ciała m o powierzchnię równi wynosi $\mu = 0,3$. Ciała pozostają w spoczynku. Oblicz maksymalną i minimalną masę M wiszącego ciała przy której układ jeszcze nie porusza się.

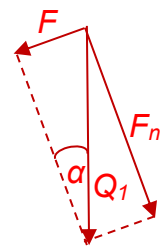


Rozwiązanie

Jako pierwszy rozpatrujemy przypadek, w którym zwiększamy masę M do momentu granicznego. Na rysunku a mamy wyszczególnione niezbędne siły. W rozpatrywanym układzie mamy dwie nici. Siła naciągu pierwszej nici wynosi N_1 a drugiej N_2 . Siły Q_1 i Q_2 reprezentują ciężary ciał, natomiast F_t to siła tarcia. Na rysunku 5b zaznaczone są składowe siły Q_1 oraz kąt α odpowiadający kątowi równi. Siła F działa wzdłuż powierzchni równi, zaś siła F_n to siła nacisku ciała o masie m prostopadła do powierzchni równi.



Rys. a



Rys. b

Rozpatrywane ciała są nieruchome, więc stosujemy pierwszą zasadę dynamiki Newtona.

Dla ciała o masie m możemy zatem napisać: $N_1 = F + F_t$.

Analogicznie dla ciała o masie M : $N_2 = Q_2$.

Ciężar ciała o masie M wynosi: $Q_2 = M g$,

więc z dwóch ostatnich równań mamy $N_2 = M g$.

Siła naciągu nici $N_2 = 2N_1$ więc $2N_1 = M g$ i ostatecznie $N_1 = \frac{M g}{2}$

Musimy określić jeszcze siły F i F_t . Z rysunku 5b widzimy, że siła $F = Q_1 \sin \alpha$ a

ponieważ $Q_1 = m g$ to mamy ostatecznie $F = m g \sin \alpha$.

F_t to siła tarcia, którą definiujemy jako iloczyn współczynnika tarcia i siły nacisku.

Z rysunku b odczytujemy, że $F_n = m g \cos \alpha$, czyli ostatecznie mamy

$$F_t = \mu m g \cos \alpha.$$

Podstawiamy do pierwszego równania określone siły N_1 , F oraz F_t i otrzymujemy

$$\text{równanie: } \frac{M g}{2} = m g \sin \alpha + \mu m g \cos \alpha.$$

Po skróceniu g i przekształceniu otrzymujemy ostatecznie

$$M = 2m(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

Podstawiamy dane liczbowe

$$M = 2 \cdot 12 \text{ kg}(\sin 30^\circ + 0,4 \cdot \cos 30^\circ)$$

$$M = 12(1 + 0,3 \cdot \sqrt{3}) \approx 18,24 \text{ kg}.$$

Drugi przypadek to obliczenie masy minimalnej, czyli to ciało o masie m ma ciągnąć drugie ciało. W tym przypadku siła tarcia F_t jest skierowana przeciwnie czyli w górę równi. Wówczas siła F jest równoważona przez siłę tarcia i siłę naciągu nici N_1 co możemy zapisać równaniem

$$F = F_t + N_1.$$

Z tego równania w analogiczny sposób wyznaczamy jak poprzednio masę M ,

$$M = 2m(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 12(1 - 0,3 \cdot \sqrt{3}) \approx 5,76 \text{ kg}.$$

Odpowiedź: układ pozostaje w spoczynku dla masy M mieszczącej się w przedziale od 5,76 kg do 18,24 kg.

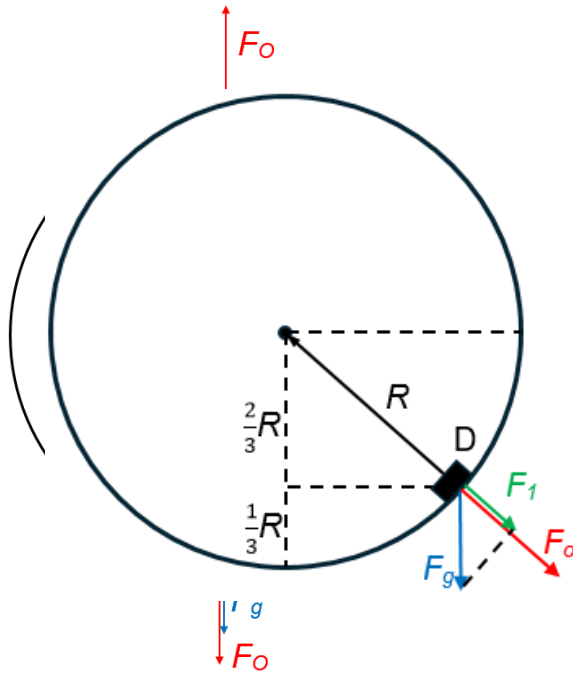
Zadanie 22

Tor ma kształt okręgu o promieniu R i ustawiony jest w płaszczyźnie pionowej. Ciało o masie m porusza się ze stałą wartością prędkości liniowej v po wewnętrznej stronie toru. Określić jaka jest siła nacisku (F_N) na tor: A) w najniższym punkcie, B) na wysokości $h = R$, C) w najwyższym punkcie ($h = 2R$), D) na wysokości $h = \frac{1}{3} R$.

Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Rozwiązanie

Sytuacja dla trzech pierwszych punktów (A, B, C) przedstawiona jest na rysunku a. Sytuacja dla czwartego punktu (D) przedstawiona jest na rysunku b.



Rys. a

Rys. b

Na poruszające się ciało działają dwie siły: ciężar ciała oznaczony F_g oraz siła bezwładności odśrodkowa F_o w ruchu po okręgu związana z nieinercyjnym układem odniesienia,

$$F_g = mg, \quad F_o = \frac{mv^2}{R}.$$

Aby ciało mogło utrzymać się na torze zakładamy, że $F_o > F_g$.

Dla rozpatrywanych punktów A, B, i C możemy napisać takie samo równanie w postaci wektorowej wyrażające siłę nacisku ciała na tor:

$$\vec{F}_N = \vec{F}_g + \vec{F}_o$$

Kierunek tej siły leży zawsze na przedłużeniu promienia. W postaci skalarnej możemy zapisać:

Dla punktu A

$$F_N = \frac{mv^2}{R} - mg$$

Dla punktu B siła F_g nie ma wpływu na nacisk, gdyż jest prostopadła do promienia. Możemy zatem zapisać:

$$F_N = F_o$$

$$F_N = \frac{mv^2}{R}$$

Dla punktu C siła F_g działa zgodnie z siłą F_o . Możemy zatem zapisać:

$$F_N = F_o + F_g$$

$$F_N = \frac{mv^2}{R} + mg$$

Dla punktu D (rys. 6b) promień okręgu podzielono na dwie części $\frac{1}{3}R$ stanowiącą wysokość, na której znajduje się ciało oraz pozostałą część $\frac{2}{3}R$. Siłę nacisku stanowi suma sił F_o i F_1 :

$$\vec{F}_N = \vec{F}_1 + \vec{F}_o ,$$

gdzie F_1 to składowa siły F_g działająca wzdłuż promienia. W postaci skalarnej możemy zapisać:

$$F_N = F_1 + F_o$$

Aby wyznaczyć siłę F_1 posłużymy się rysunkiem 6b, na którym widzimy dwa trójkąty prostokątne; trójkąt sił o bokach F_1 i F_g oraz trójkąt odległości o bokach $\frac{2}{3}R$ i R . Na rysunku można zauważyć, że kąt między F_1 i F_g jest taki sam jak między $\frac{2}{3}R$ i R . Oznacza to, że rozpatrywane trójkąty są podobne. W trójkątach takich wszystkie kąty i stosunki odpowiednich boków są równe, zatem możemy ułożyć równanie stosunków boków, z którego wyznaczymy F_1 :

$$\frac{\frac{2}{3}R}{R} = \frac{F_1}{F_g}$$

Podstawiamy za F_g i przekształcamy

$$\frac{2}{3} = \frac{F_1}{mg}$$

$$F_1 = \frac{2}{3}mg .$$

Powyższe równanie podstawiamy do równania na siłę nacisku otrzymując ostateczne rozwiązanie:

$$F_N = \frac{2}{3}mg + \frac{mv^2}{R} .$$

Zadanie 23

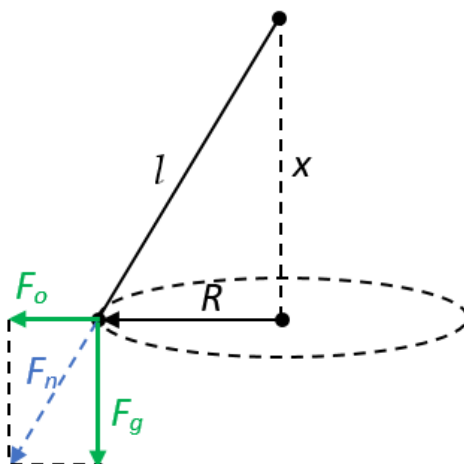
Oblicz prędkość liniową v ciężarka zawieszonego na nici o długości l , zataczającego okrąg o promieniu R . Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Rozwiązanie

Interesujące nas siły są przedstawione na rysunku. F_o to siła bezwładności (odśrodkowa) związana z układem nieinercyjnym, którym jest wirujące ciało, F_g to siła ciężkości ciała. Siłą wypadkową tych sił to naciąg nici F_n . Siła naciągu nici nie bierze jednak udziału w naszych obliczeniach.

Prędkość liniową ciała v_0 wyznaczmy ze wzoru na siłę odśrodkową:

$$F_o = \frac{mv_0^2}{R}$$



Musimy jednak napisać dodatkowe równanie dotyczące trójkątów podobnych. W trójkątach takich wszystkie kąty i stosunki odpowiednich boków są równe. Ułożymy równanie stosunków boków dla trójkątów sił i odległości:

$$\frac{R}{x} = \frac{F_o}{F_g},$$

Siła ciężkości $F_g = mg$, natomiast odległość x wyznaczmy z twierdzenia Pitagorasa:

$$l^2 = x^2 + R^2,$$

$$x = \sqrt{l^2 - R^2}.$$

Podstawiamy odpowiednie wielkości do równania stosunków boków trójkątów:

$$\frac{R}{\sqrt{l^2 - R^2}} = \frac{\frac{mv_0^2}{R}}{mg},$$

$$\frac{R}{\sqrt{l^2 - R^2}} = \frac{v_0^2}{Rg},$$

Z równania tego wyznaczamy ostatecznie szukaną prędkość:

$$v_0 = R \cdot \sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2 - R^2}}}.$$

Zadanie 24

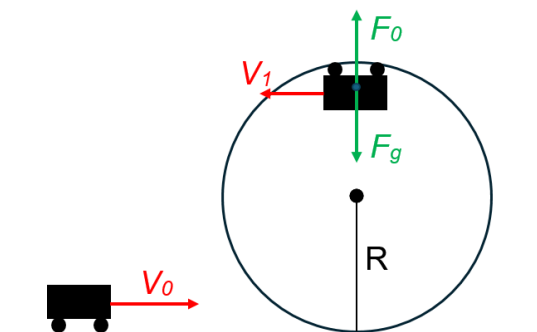
Oblicz minimalną prędkość wagonika poruszającego się po poziomym odcinku toru aby mógł on zatoczyć pionową pętlę o promieniu R . Opory ruchu zaniedbujemy. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Rozwiązanie

Aby wagonik nie oderwał się od toru w najwyższym punkcie pętli, musi mieć wystarczająco dużą prędkość, aby siła odśrodkowa F_o była większa lub w granicznym przypadku równa sile ciężkości F_g (rysunek). Zapisujemy równanie dla przypadku granicznego:

$$F_o = F_g$$

$$\frac{mv_1^2}{R} = mg \quad (1)$$



Wagonik ma na początku energię kinetyczną E_{K0} , która na wysokości $2R$ zamienia się na energię potencjalną E_P i kinetyczną E_{K1} . Zapisujemy równanie energii:

$$E_{K0} = E_P + E_{K1}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg2R + \frac{mv_1^2}{2}$$

Skracamy m i wyznaczamy szukaną prędkość v_0 :

$$v_0 = \sqrt{4gR + v_1^2} \quad (2)$$

Z równania (1) wyznaczamy v_1^2 :

$$v_1^2 = gR$$

i podstawiamy do równania (2) otrzymując ostateczny wynik:

$$v_0 = \sqrt{4gR + gR}$$

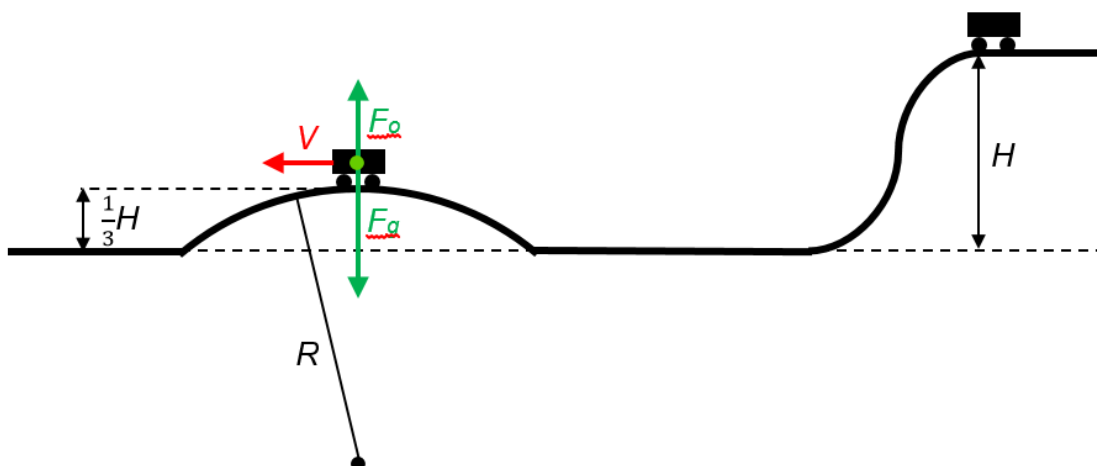
$$v_0 = \sqrt{5gR}.$$

Zadanie 25

Z góry o wysokości H zsuwa się swobodnie wózek o masie m i następnie wjeżdża na wypukły most w kształcie wycinka okręgu o promieniu R i wysokości $(1/3)H$. Oblicz prędkość oraz siłę nacisku wózka (uwzględniając siłę odśrodkową) w najwyższym punkcie mostu. Przyspieszenie ziemskie wynosi g . Opory ruchu zaniedbujemy.

Rozwiązanie

Wymiary oznaczenia i działające siły oznaczono na rysunku.



Prędkość w najwyższym punkcie mostu obliczamy z zasady zachowania energii

Wózek ma na początku (na wysokości H) energię potencjalną E_{P1} , która w najwyższym punkcie mostu (na wysokości $(1/3)H$) zamienia się na energię kinetyczną E_K

potencjalną E_{P2} . Zapisujemy równanie energii:

$$E_{P1} = E_{P2} + E_K$$

$$mgH = mg\frac{1}{3}H + \frac{mv^2}{2}$$

$$\frac{v^2}{2} = gH - \frac{1}{3}gH$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{2}{3}gH$$

Stąd szukana wielkość prędkości wynosi:

$$v = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}gH}$$

Wartość szukanej siły nacisku, którą oznaczmy jako F_N , wyznaczmy odejmując od siły ciężkości wózka siłę odśrodkową F_o :

$$F_N = F_g - F_o$$

$$F_N = mg - \frac{mv^2}{R}$$

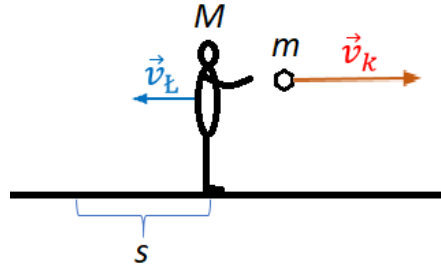
Do równania podstawiamy wyznaczoną uprzednio prędkość otrzymując ostateczną wartość siły nacisku:

$$F_N = mg - \frac{m^4gH}{R}$$

$$F_N = mg \left(1 - \frac{4H}{3R} \right)$$

Zadanie 26

Łyżwiarz stojąc na łyżwach rzuca do przodu w kierunku poziomym kamień o masie m z prędkością v_k (rysunek). Wyznaczyć współczynnik tarcia łyżew o lód i pracę wykonaną przez łyżwiarza, jeżeli jego masa wynosi M i jeśli po rzucie cofnął się on na odległość s . Przyspieszenie ziemskie wynosi g .



Rozwiązanie

Początkowa energia kinetyczna łyżwiarza w chwili oderwania się kamienia od jego rąk równa jest wykonanej przez niego pracy. Jest ona równa pracy wykonanej przez siłę tarcia F_T :

$$E_K = W ,$$

$$\frac{M v_L^2}{2} = F_T \cdot s ,$$

gdzie v_L to początkowa prędkość łyżwiarza. Siła tarcia to iloczyn współczynnika tarcia (μ) i siły nacisku F_N , która jest równa ciężarowi łyżwiarza; $F_N = M \cdot g$. Podstawiamy zatem siłę F_T :

$$\frac{M v_L^2}{2} = \mu M g \cdot s .$$

Ze wzoru tego wyznaczamy szukany współczynnik tarcia:

$$\mu = \frac{v_L^2}{2 g s} .$$

Prędkość łyżwiarza wyznaczamy z zasady zachowania pędu – pęd kamienia równa się pędowi łyżwiarza:

$$m \cdot v_k = M \cdot v_L ,$$

$$v_L = \frac{m \cdot v_k}{M} .$$

Podstawiamy do wzoru na μ i wyznaczamy go:

$$\mu = \frac{\left(\frac{m \cdot v_k}{M}\right)^2}{2 g s} ,$$

$$\mu = \frac{m^2 v_k^2}{2 g s M^2} .$$

Pracę wykonaną przez łyżwiarza wyznaczamy z pracy siły tarcia:

$$W = F_T \cdot s = \mu M g \cdot s.$$

Podstawiamy uprzednio wyznaczone otrzymując ostateczny wynik:

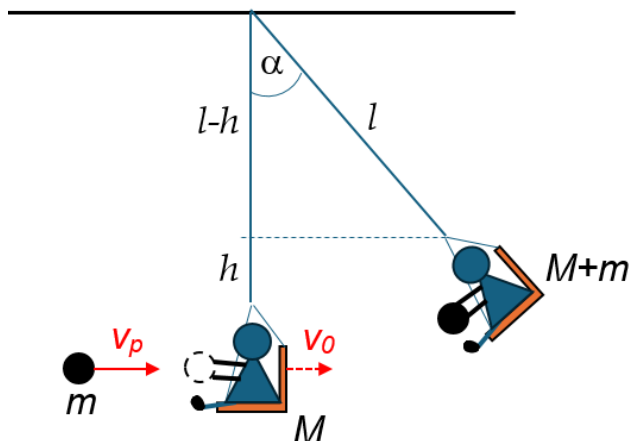
$$W = \frac{m^2 v_k^2}{2 g s M^2} M g s,$$

$$W = \frac{m^2 v_k^2}{2 M}.$$

Zadanie 27

Dziewczynka o masie $M = 40 \text{ kg}$ siedząc na nieruchomej huśtawce łapie poruszającą się w kierunku poziomym z prędkością $V_P = 4 \text{ m/s}$ piłkę lekarską o masie $m = 4 \text{ kg}$. W wyniku tego huśtawka odchyliła się o pewien kąt. Oblicz ten kąt, jeżeli huśtawka ma długość $L = 3 \text{ m}$ a przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10 \text{ m/s}^2$. Masę huśtawki zaniedbujemy.

Rozwiązanie



Z przedstawionego rysunku wynika, że aby obliczyć szukany kąt α , należy znać wysokość h na jaką wzniesie się dziewczynka z piłką:

$$\cos \alpha = \frac{l - h}{l},$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{h}{l}. \quad (1)$$

Wysokość wyznaczymy z zasady zachowania energii. Energia kinetyczna dziewczynki ze złączoną piłką w najniższym położeniu (tuż po złapaniu piłki) jest równa energii potencjalnej w najwyższym położeniu:

$$\frac{(M + m)v_0^2}{2} = (M + m)gh,$$

Po uproszczeniu i przekształceniu wyznaczamy h :

$$h = \frac{v_0^2}{2g},$$

gdzie v_0 to początkowa prędkość dziewczynki z piłką, którą wyznaczymy z zasady zachowania pędu:

$$m \cdot v_p = (M + m) \cdot v_0,$$

$$v_0 = \frac{mv_p}{M + m}.$$

Podstawiamy do wzoru na wysokość:

$$h = \frac{\left(\frac{mv_p}{M + m}\right)^2}{2g},$$

$$h = \frac{v_p^2 \cdot m^2}{2g(M + m)^2}.$$

Podstawiamy do wzoru (1) i wyznaczamy $\sin \alpha$.

$$\cos \alpha = 1 - \frac{v_p^2 \cdot m^2}{2gl(M + m)^2}.$$

Podstawiamy wartości liczbowe:

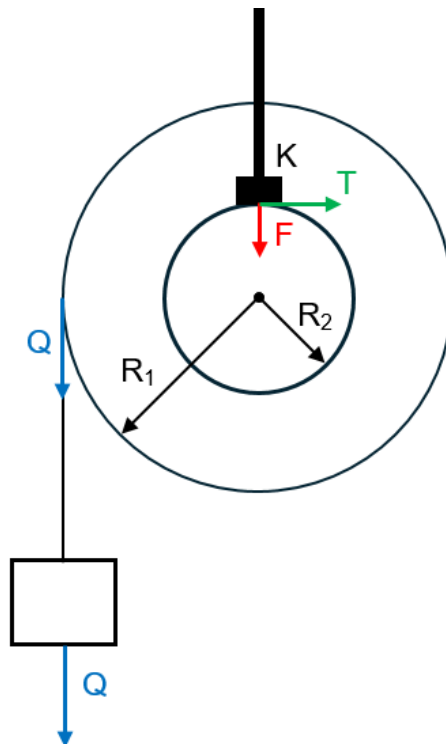
$$\cos \alpha = 1 - \frac{4^2 \cdot 4^2}{2 \cdot 10 \cdot 3(40 + 4)^2} \frac{\frac{m^2 \cdot kg^2}{s^2}}{\frac{m \cdot m \cdot kg^2}{s^2}}.$$

$$\cos \alpha = 1 - 0,002204$$

$$\cos \alpha = 0,997796 \rightarrow \alpha \approx 3,8^\circ$$

Zadanie 28

Ciało o ciężarze Q wisi na lince nawiniętej na bęben o promieniu $R_1 = 50 \text{ cm}$. Bęben połączony jest współśrodkowo z tarczą o promieniu $R_2 = 30 \text{ cm}$. Na tarczę działa pionowa siła $F = 20 \text{ N}$, która dociska klocek (K) do tarczy (patrz rysunek). Współczynnik tarcia statycznego klocka o tarczę wynosi $\mu = 0,5$. Oblicz jaki maksymalny ciężar Q możemy zawiesić na lince aby tarcza z bębniem nie obracały się. Ciężar klocka oraz tarcie na osi pomijamy.



Rozwiązanie

Moment siły wiszącego ciężarka równa się momentowi siły tarcia:

$$R_1 Q = R_2 T$$

$$R_1 Q = R_2 \mu F$$

$$Q = \frac{R_2 \mu F}{R_1}.$$

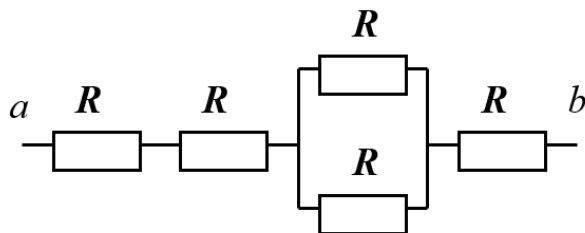
Wielkości jednostek długości promieni się skracają, więc nie musimy ich zamieniać na metry.

$$Q = \frac{30\text{cm} \cdot 0,5 \cdot 20\text{N}}{50\text{cm}} = \frac{30}{5} = 6\text{N}$$

Elektryczność – prąd stały

Zadanie 29

Oblicz opór między punktami a i b, jeżeli każdy opornik ma wartość $R = 5 \Omega$.



Rozwiązanie

Na początku obliczamy opór zastępczy oporników połączonych równolegle.

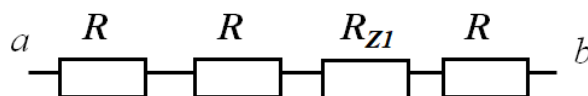
$$\frac{1}{R_{Z1}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{R+R}{R \cdot R}$$

$$R_{Z1} = \frac{R \cdot R}{R + R}$$

Obliczamy wartość R_{Z1} .

$$R_{Z1} = \frac{5 \cdot 5}{5 + 5} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} = 2,5 \Omega$$

Uzyskaliśmy w ten sposób układ zastępczy oporników połączonych szeregowo.



Szukany opór będzie wynosił:

$$R_{ab} = R + R + R + R_{Z1} ,$$

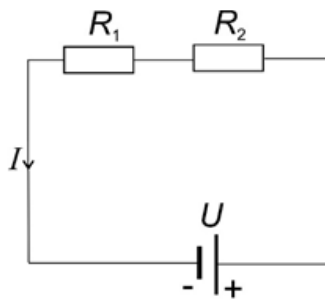
$$R_{ab} = 3R + R_{Z1} ,$$

$$R_{ab} = 3 \cdot 5 + 2,5 = 17,5 \Omega ,$$

Zadanie 30

Dwa jednakowe rezystory, każdy o oporze 3Ω , podłączono szeregowo do źródła napięcia stałego $U = 10 \text{ V}$. Oblicz wartość prądu pobieranego ze źródła.

Rozwiązanie



Opór zastępczy wynosi:

$$R_z = R_1 + R_2$$

Podstawmy

$$R_1 = R_2 = R$$

Otrzymamy

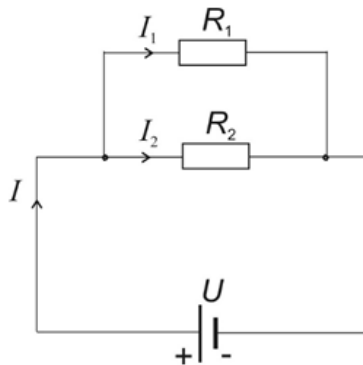
$$R_z = 2R = 6 \Omega$$

Wykorzystujemy prawo Ohma

$$I = \frac{U}{R_z} = \frac{10 \text{ V}}{6 \Omega} = \frac{5}{3} \text{ A} \approx 1,67 \text{ A}$$

Zadanie 31

Dwa jednakowe rezystory, każdy o oporze 8Ω , podłączono równolegle do źródła napięcia stałego $U = 9 \text{ V}$. Oblicz wartość prądu pobieranego ze źródła.



Rozwiązanie

Obliczamy opór zastępczy:

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Podstawmy $R_1 = R_2 = R$

$$\frac{1}{R_z} = \frac{2}{R}$$

Przekształcamy i podstawiamy

$$R_z = \frac{R}{2} = \frac{8\Omega}{2} = 4\Omega$$

Wykorzystujemy prawo Ohma

$$I = \frac{U}{R_z} = \frac{16V}{4\Omega} = 4A$$

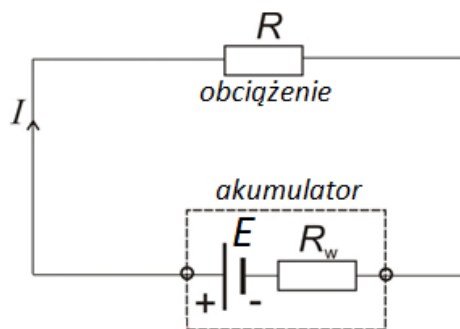
Zadanie 32

Siła elektromotoryczna akumulatora samochodowego, ma wartość $E = 12V$, a opór wewnętrzny $R_w = 0,02\Omega$. Oblicz prąd zwarcia oraz napięcie na zaciskach akumulatora:

- przy obciążeniu prądem $I = 5A$,
- przy zasilaniu rozrusznika (startera) pobierającego prąd $I = 100A$.

Rozwiązanie

Na podstawie treści zadania rysujemy schemat.



Prąd zwarcia $I_z = \frac{12V}{0,02\Omega} = 600A$

Napięcie przy prądzie $I = 5A$

$$U = E - R_w I$$

Podstawiamy dane liczbowe

$$U = 12V - 0,02\Omega \cdot 5A = 11,9V$$

Napięcie przy pracy rozrusznika $I = 100A$

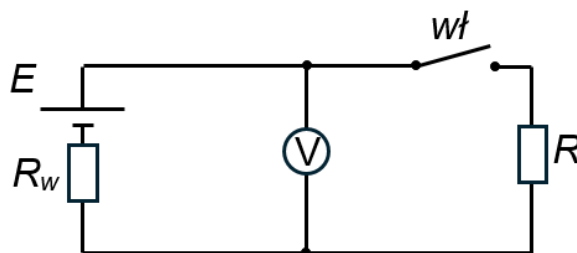
$$U = E - R_w I$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$U = 12V - 0,02\Omega \cdot 100A = 10V .$$

Zadanie 33

W obwodzie pokazanym na rysunku, wskazanie woltomierza przy otwartym wyłączniku wynosi $U_1 = 2,05V$ a przy zamkniętym $U_2 = 2V$. Oblicz opór wewnętrzny R_w źródła wiedząc, że $R = 10 \Omega$.



Rozwiązanie

Przy otwartym włączniku woltomierz pokazuje napięcie U_1 , które jest równe sile elektromotorycznej E :

$$U_1 = E$$

Przy zamkniętym włączniku woltomierz pokazuje napięcie U_2 , które jest równe sile elektromotorycznej E pomniejszonej o spadek napięcia na oporze wewnętrznym.

$$U_2 = E - I \cdot R_w \quad (1)$$

$$\text{gdzie} \quad I = \frac{U}{R}$$

$$I = \frac{2V}{10\Omega} = 0,2A$$

Przekształcamy wzór (1):

$$R_w = \frac{E - U_2}{I}$$

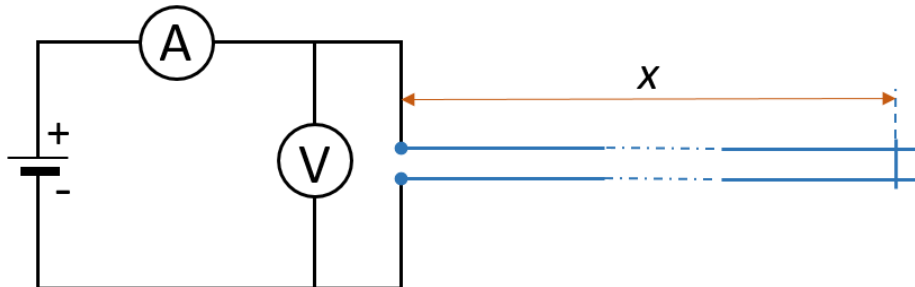
$$R_w = \frac{2,05V - 2V}{0,2A} = \frac{0,5}{2} = 0,25\Omega$$

Zadanie 34

Obliczyć w jakiej odległości od telefonu nastąpiło zwarcie dwuprzewodowej linii telefonicznej wykonanej z miedzianych przewodów o przekroju okrągłym i średnicy **$d = 1mm$** . Jeżeli przyłączając baterię do końca przewodów amperomierz wskazał prąd

$I = 1A$ a woltomierz $U = 10V$. Zakładamy, że opór wewnętrzny woltomierza jest bardzo duży i pomijalny. Opór właściwy miedzi $\rho = 1,6 \cdot 10^{-8} \Omega m$.

Dane: d, l, U, ρ . $x = ?$



Rozwiązanie

Aby obliczyć x korzystamy ze wzoru na opór przewodnika o długości l polu przekroju s oraz oporze właściwym ρ :

$$R = \frac{\rho l}{s} \Rightarrow l = \frac{s \cdot R}{\rho}.$$

Dla naszego zadania $l = 2x$, więc:

$$2x = \frac{s \cdot R}{\rho} \Rightarrow x = \frac{s \cdot R}{2\rho}. \quad (1)$$

Wielkości s i R wynoszą:

$$s = \frac{\pi d^2}{4}, \quad R = \frac{U}{I}$$

Podstawiamy te wielkości do równania (1):

$$\begin{aligned} x &= \frac{\frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{U}{I}}{2\rho} \\ x &= \frac{U \pi d^2}{8 I \rho}, \\ x &= \frac{10V \cdot 3,14 \cdot 10^{-6} m^2}{8 \cdot 1A \cdot 1,6 \cdot 10^{-8} \Omega m} = 245 m. \end{aligned}$$

Zadanie 35

Linia zasilająca odbiornik o poborze mocy $2200W$ przy napięciu $U_2 = 220V$ ma długość $L = 15m$. Jaki powinien być przekrój przewodów aluminiowych, jeżeli dopuszczalny

spadek napięcia wynosi 1%? Oblicz również stratę mocy w tych przewodach linii. Konduktywność (przewodność elektryczna właściwa) aluminium wynosi $\gamma = 34 (S \cdot m)/mm^2$.

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na moc prądu elektrycznego:

$$P = U \cdot I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{P}{U}$$

Prąd odbiornika $I = \frac{2200 W}{220 V} = 10 A$

Spadek napięcia w woltach wynosi 1% napięcia 220 V:

$$\Delta U = \frac{1}{100} \cdot 220 = 2,2 V$$

Aby obliczyć przekrój przewodów korzystamy ze wzoru na opór przewodnika o długości l polu przekroju s oraz konduktywności γ :

$$R = \frac{l}{\gamma s} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{l}{\gamma R}$$

Korzystamy z prawa Ohma: $R = \frac{\Delta U}{I}$ oraz z faktu, że linia jest dwuprzewodowa, więc $l = 2L$. Obliczamy s .

$$s = \frac{2L}{\gamma \Delta U} I = \frac{2 \cdot 15}{34 \cdot 2,2} \cdot 10 = 4 mm^2$$

Napięcie na początku linii $U_1 = U_2 + \Delta U = 220 + 2,2 \approx 222 V$

W przewodach linii występuje podczas przepływu prądu strata mocy zgodnie z prawem *Joule'a-Lenza*

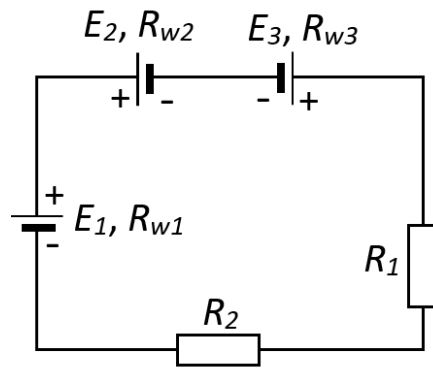
$$\Delta P = R_l I^2 = \frac{2l}{\gamma s} I^2 = \frac{2 \cdot 15}{34 \cdot 4} \cdot 10^2 = 22 W$$

Straty mocy możemy również obliczyć:

$$\Delta P = \Delta U \cdot I = 2,2 V \cdot 10 A = 22 W$$

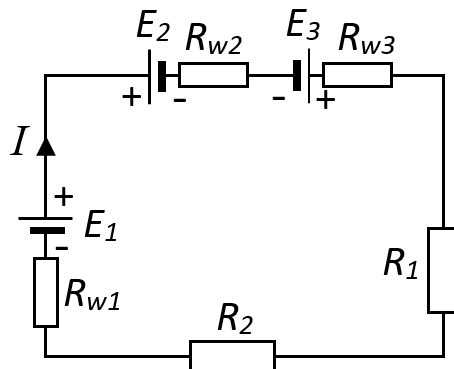
Zadanie 36

W obwodzie pokazanym na rysunku dane są siły elektromotoryczne wraz z oporami wewnętrznymi: $E_1 = 6 V$, $R_{w1} = 0,05 \Omega$, $E_2 = 12 V$, $R_{w2} = 0,1 \Omega$, $E_3 = 4 V$, $R_{w3} = 0,05 \Omega$, oraz opory: $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 0,8 \Omega$. Obliczyć natężenie prądu.



Rozwiązanie

Rozrysowujemy układ elektryczny z zaznaczonym umownym kierunkiem prądu.



Korzystamy z prawa Ohma:

$$I = \frac{U}{R}$$

Wszystkie elementy są połączone szeregowo dlatego też U jest sumą sił elektromotorycznych a R jest sumą wszystkich oporów

$$I = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_{w1} + R_{w2} + R_{w3} + R_1 + R_2}$$

Siła elektromotoryczna E_2 ma przeciwny znak, gdyż przeciwdziała ona przyjętemu kierunkowi prądu. Podstawiamy wartości liczbowe otrzymując ostateczne rozwiązanie:

$$I = \frac{6 - 12 + 4}{0,05 + 0,1 + 0,05 + 1 + 0,8} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ A}$$

Natężenie prądu ma znak ujemny, co znaczy, że rzeczywisty kierunek prądu jest przeciwny od założonego.

Zadanie 37

Jaka jest potrzebna długość drutu kanthalowego o średnicy $d = 0,35 \text{ mm}$ do wykonania

grzejnika na napięcie $U = 220V$, jeżeli dopuszczalny prąd obciążenia drutu $I = 1,8A$?
Wiemy, że opór właściwy kanthalu $\rho = 1,45 (\Omega \cdot mm^2)/m$.

Rozwiązanie

Z napięcia i prądu obliczamy rezystancję drutu,

$$R = \frac{U}{I} = \frac{220 V}{1,8 A} = 122 \Omega .$$

Aby obliczyć l korzystamy ze wzoru:

$$R = \frac{\rho l}{S} \Rightarrow l = \frac{S \cdot R}{\rho} .$$

Przekrój drutu,

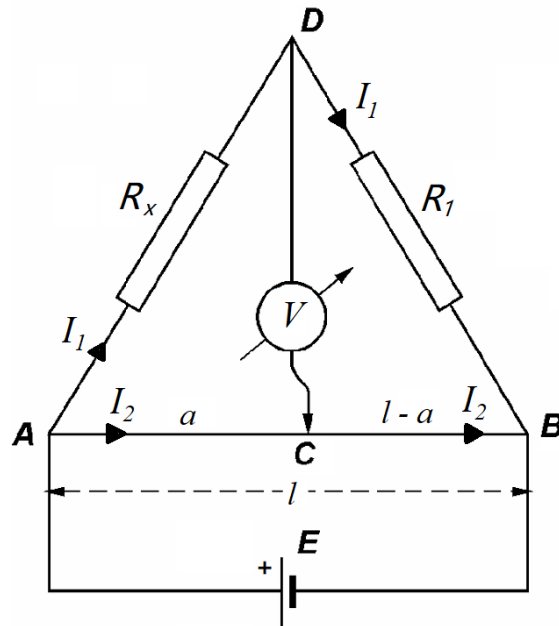
$$S = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{3,14}{4} \cdot 0,35^2 mm^2 = \frac{3,14 \cdot 0,1225}{4} mm^2 = 0,096 mm^2 .$$

Obliczamy długość

$$l = \frac{S \cdot R}{\rho} = \frac{0,096 mm^2 \cdot 122 \Omega}{1,45 \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}} = 8m .$$

Zadanie 38

Między punktami A , B mostka Wheatstone'a (rysunek) przyłączono drut oporowy o długości $l = 1m$, a następnie zrównoważono mostek (woltomierz wskazywał zero) obierając położenie punktu C , tak że odcinek AC drutu wynosił $a = 36 cm$. Oblicz opór R_x , jeżeli opór $R_1 = 800 \Omega$.



Rozwiązanie

Mostek jest zrównoważony, jeżeli $U_{CD} = 0$, czyli między punktami CD nie płynie prąd. Wówczas przez opory R_x i R_1 płynie taki sam prąd, oznaczony na rysunku jako I_1 . Analogicznie w gałęzi ACB płynie prąd I_2 . Możemy więc zapisać:

$$U_{AD} = U_{AC}$$

Korzystamy z prawa Ohma $I_1 R_x = I_2 R_{AC}$ (1)

Analogicznie:

$$U_{DB} = U_{CB}$$

$$I_1 R_1 = I_2 R_{BC}$$

$$I_1 = \frac{I_2 R_{BC}}{R_1}$$

Podstawiamy do równania (1):

$$\frac{I_2 R_{BC}}{R_1} R_x = I_2 R_{AC}$$

$$R_{BC} R_x = R_{AC} R_1 \quad (2)$$

Aby obliczyć opory odcinków BC i AC drutu oporowego musimy posłużyć się wzorem na opór przewodnika o danej długości przekroju S oraz rezystancji właściwej ρ :

$$R_{BC} = \frac{\rho(l-a)}{S}, \quad R_{AC} = \frac{\rho a}{S}$$

Podstawiamy te wielkości do wzoru (2) i wyznaczamy szukany opór R_x :

$$\frac{\rho(l-a)}{S} R_x = \frac{\rho a}{S} R_1$$

$$(l-a)R_x = aR_1$$

$$R_x = \frac{aR_1}{(l-a)}.$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$R_x = \frac{0,36m \cdot 800\Omega}{(1-0,36)m} = 450 \Omega$$

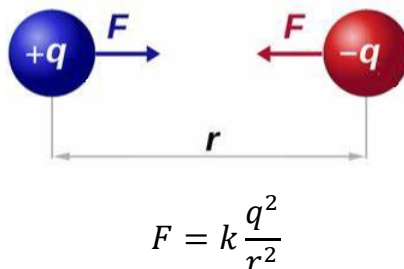
Pole elektryczne, kondensatory

Zadanie 39

Dwie jednakowe kulki przyciągają się z odległości 2 m siłą 0,045 N. Oblicz ładunek kulki, zakładając, że ładunki kulek są równe co do wartości i różnią się jedynie znakiem. Współczynnik przenikalności dla powietrza $k = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$.

Rozwiązanie

Kulki się przyciągają a siła z jaką działają na siebie, jest określona prawem Coulomba:



$$F = k \frac{q^2}{r^2}$$

skąd

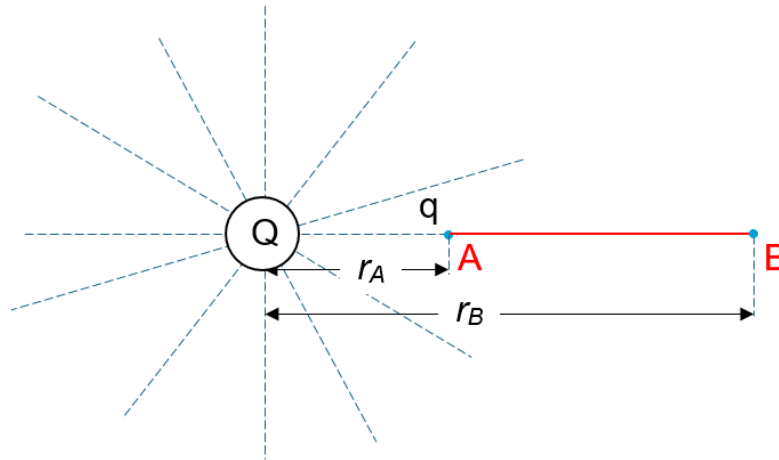
$$q^2 = \frac{Fr^2}{k}$$

$$q = r \cdot \sqrt{\frac{F}{k}} = 2m \cdot \sqrt{\frac{0,045N}{9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}}} = 2\sqrt{5} \cdot 10^{-6}C \approx 4,5 \mu C$$

Zadanie 40

Jaką pracę należy wykonać, aby ładunek $q = 1 \mu C$ został przeniesiony w polu elektrostatycznym ładunku punktowego $Q = 1 mC$. Ładunek przenosimy z punktu oddalonego 2 m od ładunku Q do punktu oddalonego o 5 m od tego samego ładunku

(rysunek). Współczynnik przenikalności dla powietrza $k = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$.



Rozwiązanie

Pracę obliczymy z zależności, w której napięcie U równe jest różnicy potencjałów:

$$W = q \cdot U = q(V_1 - V_2)$$

Wstawiamy potencjały:

$$V_1 = \frac{kQ}{r_A}, \quad V_2 = \frac{kQ}{r_B}$$

$$W = q \left(\frac{kQ}{r_A} - \frac{kQ}{r_B} \right)$$

$$W = kqQ \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

$$W = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot 10^{-6} C \cdot 10^{-3} C \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{5m} \right) = 2,7 J$$

Pracą można obliczyć także drugim sposobem, korzystając ze średniej wartości siły:

$$W = F_{sr}(r_B - r_A)$$

$$F_{sr} = \frac{kQq}{r_A r_B} = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot 10^{-6} C \cdot 10^{-3} C}{2m \cdot 5m} = 0,9 N$$

$$W = 0,9 N (5m - 2m) = 2,7 J$$

Zadanie 41

Napięcie $U = 1 kV$ zostało podłączone do dwóch równoległych płyt. Oblicz:

a) pracę związaną z przeniesieniem ładunku $q = 0,01 C$ z jednej płyty na drugą,

b) natężenie pola elektrostatycznego między tymi płytami jeżeli odległość między nimi wynosi $d = 20 \text{ cm}$,

c) w jakim czasie siły tego pola przeniosą kulkę o masie $m = 100 \text{ g}$ i ładunku $q = 0,01 \text{ C}$ z jednej płyty na drugą.

Rozwiązanie

a) Szukana praca:

$$W = q \cdot U = 0,01 \text{ C} \cdot 1000 \text{ V} = 10 \text{ J}$$

a) Szukane natężenie pola:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{1000 \text{ V}}{0,2 \text{ m}} = 5000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

c) Szukany czas obliczymy z drogi w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$d = \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2d}{a}}$$

Przyspieszenie wyznaczamy z drugiej zasady dynamiki Newtona:

$$a = \frac{F}{m}$$

Natomiast siła działająca na ładunek w polu elektrycznym:

$$F = q \cdot E$$

Natężenie pola elektrycznego E wyznaczamy ze wzoru:

$$E = \frac{U}{d}$$

Z tych trzech zależności wyznaczamy przyspieszenie $a = \frac{qU}{dm}$, które podstawiamy do wzoru na czas:

$$t = \sqrt{\frac{2d}{\frac{qU}{dm}}} = d \cdot \sqrt{\frac{2m}{qU}}$$

$$t = 0,2 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1 \text{ kg}}{0,001 \text{ C} \cdot 1000 \text{ V}}} = 0,028 \text{ s}$$

Zadanie 42

Oblicz pojemność zwijki kondensatorowej o następujących danych: długość folii

49



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.
Utwór dostępny jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe.

aluminiowej $l = 10,4 \text{ m}$; szerokość $b = 12 \text{ cm}$; grubość izolacji $d = 0,1 \text{ mm}$; przenikalność elektryczna względna $\epsilon_r = 4,5$. Oblicz także ładunek na okładzinach i natężenie pola elektrycznego tego kondensatora przy napięciu $U = 1200 \text{ V}$ na jego okładzinach. Przenikalność dielektryczna próżni $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.

Rozwiązanie

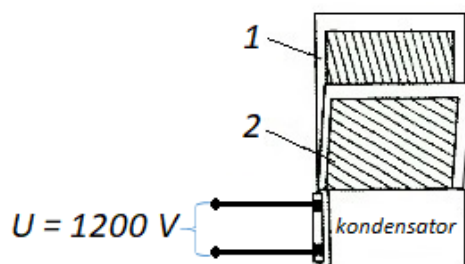
Pojemność kondensatora płaskiego wyrażamy wzorem:

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d}$$

Gdzie: A - pole powierzchni okładziny; d – odległość między okładzinami.

Zwijka kondensatorowa składa się z dwóch warstw folii aluminiowej przełożonej naprzemiennie dwoma warstwami dielektryka (rysunek). Dla zwojek kondensatorowych A oznacza pole obustronnej powierzchni okładziny:

$$A = 2 \cdot l \cdot b = 2 \cdot 10,4 \text{ m} \cdot 0,12 \text{ m} = 2,5 \text{ m}^2$$



Budowa zwojki kondensatorowej:

1 – dielektryk, 2 – okładziny z folii aluminiowej.

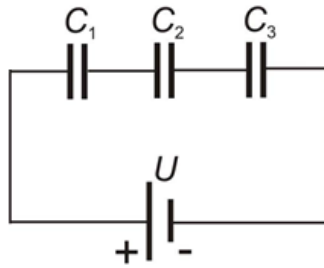
Pojemność: $C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} = \frac{4,5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2,5}{0,0001} = 10^{-6} \text{ F} = 1 \mu\text{F}$

Ładunek: $Q = CU = 10^{-6} \cdot 1200 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ C} = 1,2 \text{ mC}$

Natężenie pola: $E = \frac{U}{d} = \frac{1200}{0,0001} = 1,2 \cdot 10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

Zadanie 43

Trzy kondensatory o pojemnościach $C_1 = 6 \mu\text{F}$; $C_2 = 18 \mu\text{F}$; $C_3 = 9 \mu\text{F}$ włączono w szereg i przyłożono do nich napięcie $U = 6000 \text{ V}$ (rysunek). Oblicz całkowity ładunek Q i napięcie na poszczególnych kondensatorach.



Rozwiązanie

Najpierw obliczamy pojemność zastępczą układu szeregowego w mikrofaradach

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$C = 3 \mu F$$

Znając napięcie U i pojemność C obliczymy ładunek Q

$$Q = CU = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 6000 = 18 \cdot 10^{-3} C = 18 mC$$

Napięcie na kondensatorze C_1 :

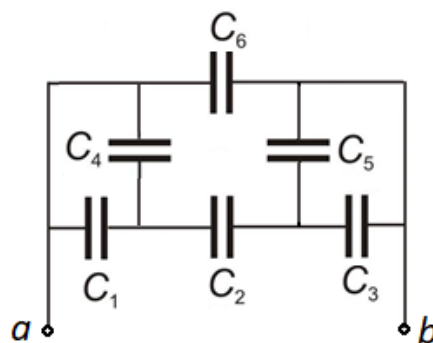
$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-6}} = 3 \cdot 10^3 V = 3000 V$$

Analogiczne obliczenia dla pozostałych kondensatorów dają wartości:

$$U_2 = 1000V; U_3 = 2000V$$

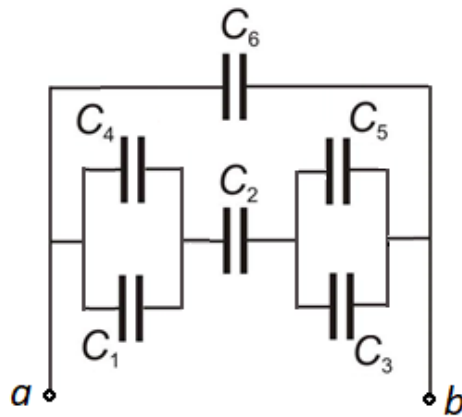
Zadanie 44

Oblicz pojemność między punktami a i b układu kondensatorów jak na rysunku, jeżeli pojemność każdego kondensatora wynosi $100 nF$.



Rozwiązanie

Aby lepiej był widoczny sposób podłączenia kondensatorów narysujemy ten schemat inaczej:

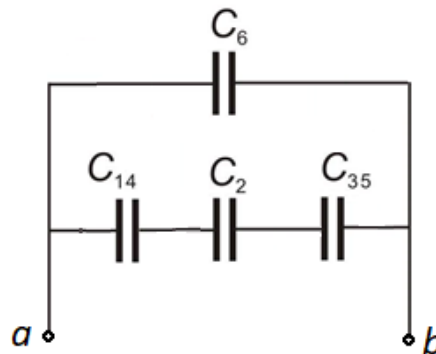


Obliczamy pojemność kondensatorów połączonych równolegle:

$$C_{14} = C_1 + C_4 = 100 \text{ nF} + 100 \text{ nF} = 200 \text{ nF}$$

$$C_{35} = C_3 + C_5 = 100 \text{ nF} + 100 \text{ nF} = 200 \text{ nF}$$

Rysujemy nowy bardziej prosty schemat:

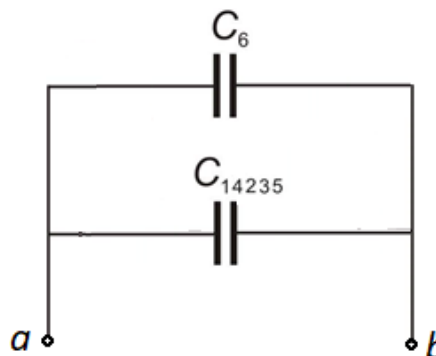


Obliczamy pojemność kondensatorów połączonych szeregowo:

$$\frac{1}{C_{14235}} = \frac{1}{C_{14}} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{35}} = \frac{1}{200} + \frac{1}{100} + \frac{1}{200} = \frac{1}{200} + \frac{1}{100} + \frac{1}{200} = \frac{1}{200} + \frac{2}{200} + \frac{1}{200} = \frac{4}{200}$$

$$C_{14235} = \frac{200}{4} = 50 \text{ nF}$$

Rysujemy nowy prosty schemat:



Obliczamy pojemność kondensatorów połączonych równolegle otrzymując ostateczny wynik:

$$C_{ab} = C_{14235} + C_6 = 50 \text{ nF} + 100 \text{ nF} = 150 \text{ nF} .$$