



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



NCBR
Narodowe Centrum Badań i Rozwoju

MATERIAŁY DYDAKTYCZNE

do dodatkowych zajęć wyrównawczych z przedmiotu

Matematyka

dla studentów kierunku

Inżynieria Odnawialnych Źródeł Energii

Opracował

dr Piotr Waniurski

Lublin 2025 r.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.
Utwór dostępny jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe.

Projekt pn. „*POLLUB zieloną transformację*” realizowany jest w ramach programu Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego 2021-2027 współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego Plus zgodnie z umową nr FERS.01.05-IP.08-0049/23-00.



Wielomiany

Zadania

1. Wykorzystując schemat Hornera przeprowadzić dzielenie:

a) wielomianu $W(x) = x^3 - x^2 - 15$ przez wielomian $H(x) = x - 3$

b) wielomianu $W(x) = 3x^4 - 2x^2 - x + 3$ przez wielomian $G(x) = x + 2$

2. Rozwiązać równania

a) $x^3 - 10x^2 + x - 10 = 0$

b) $x^3 - 4x^2 - 25x + 100 = 0$

c) $x^5 - 36x^3 - x^2 + 36 = 0$

d) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

e) $2x^4 + 3x^3 + 3x - 2 = 0$

f) $3x^4 - 7x^3 + 7x - 3 = 0$

g) $x^3 - 13x - 12 = 0$

h) $x^4 - 10x^2 + 16 = 0$

i) $x^7 - 26x^4 - 27x = 0$

j) $x^3 - 6x^2 + 7x - 10 = 0$

k) $x^3 - 4x^2 - 15x - 6 = 0$

l) $x^4 - 5x^3 - 32x^2 + 72 = 0$

m) $2x^3 + 3x^2 + 15x + 7 = 0$

n) $5x^3 - 12x^2 - 16x + 8 = 0$

o) $x^4 - 18x^3 + 82x^2 - 18x + 1 = 0$

3. Rozłożyć wielomiany na czynniki

a) $W(x) = x^4 + 2025$

b) $H(x) = x^6 + 64$

c) $P(x) = x^8 + 64$



Rozwiązania

1. a) $W(x) = x^3 - x^2 - x - 15$, $H(x) = x - 3$

Schemat Hornera ma zastosowanie przy dzieleniu dowolnego wielomianu $W(x)$ przez prosty wielomian postaci $H(x) = x - p$, gdzie p jest dowolną liczbą rzeczywistą. Technika ta, ma zastosowanie między innymi do rozkładania wielomianów na czynniki, co w matematyce wyższej jest wykorzystywane na przykład przy obliczaniu granic funkcji, a także do obliczania całek.

Konstruujemy na początku następującą nieskomplikowaną tabelkę, złożoną z dwóch wierszy:

	1	-1	-1	-15
3				

Liczby w górnym wierszu są kolejnymi współczynnikami wielomianu $W(x) = x^3 - x^2 - x - 15$, zaś wartość 3 z dolnego wiersza jest pierwiastkiem wielomianu H . W pierwszej kolejności, przepisujemy współczynnik przy najwyższej potędze do dolnego wiersza:

	1	-1	-1	-15
3	1			

Następnie mnożymy przez siebie dwie liczby zaznaczone na zielono i ich iloczyn dodajemy do liczby czerwonej, otrzymany wynik wpisujemy w pierwsze wolne pole:

	1	-1	-1	-15
3	1	2		

Kontynuujemy dalej według tego samego schematu:

	1	-1	-1	-15
3	1	2	5	

I ostatni raz:

	1	-1	-1	-15
3	1	2	5	0

Wartość znajdująca się w prawym dolnym rogu skompletowanej tabeli oznacza resztę z dzielenia. Ponieważ:

$$W(3) = 3^3 - 3^2 - 3 - 15 = 27 - 9 - 3 - 15 = 0,$$

więc liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu W . W tym przypadku można było zatem przewidzieć, że reszta wynosi zero, ponieważ na mocy twierdzenia Bezout reszta z dzielenia $W(x)$ przez $H(x) = x - 3$ jest równa $W(3)$.

Trzy pozostałe liczby pojawiające się w dolnym wierszu naszej tabeli, czyli 1, 2, 5, są kolejnymi współczynnikami wielomianu, który jest wynikiem naszego dzielenia. Ponieważ wynik dzielenia jest wielomianem stopnia o 1 mniejszego niż W , będzie miał on stopień drugi, dostajemy zatem wynik:

$$P(x) = x^2 + 2x + 5$$

Podsumowując, uzyskaliśmy następujący rozkład na czynniki:

$$W(x) = x^3 - x^2 - x - 15 = (x - 3)(x^2 + 2x + 5)$$



b) $W(x) = 3x^4 - 2x^2 - x + 3$, $G(x) = x + 2$

Wpisujemy do tabeli współczynniki wielomianu $(x) = 3x^4 - 2x^2 - x + 3$ oraz
miejsce zerowe wielomianu $G(x) = x + 2$

	3	0	-2	-1	3
-2					

Postępując według opisanego wcześniej algorytmu, dostajemy:

	3	0	-2	-1	3
-2	3	-6	10	-21	45

Wynikiem dzielenia jest zatem wielomian:

$$P(x) = 3x^3 - 6x^2 + 10x - 21$$

natomiast reszta z dzielenia wynosi 45. Jest to oczywiście zgodne z twierdzeniem
Bezou, ponieważ:

$$W(2) = 3 \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 - (-2) + 3 = 3 \cdot 16 - 2 \cdot 4 + 2 + 3 = 45$$

Możemy zatem zapisać:

$$3x^4 - 2x^2 - x + 3 = (x + 2)(3x^3 - 6x^2 + 10x - 21) + 45$$

albo przy pomocy ułamków:

$$\frac{3x^4 - 2x^2 - x + 3}{x + 2} = 3x^3 - 6x^2 + 10x - 21 + \frac{45}{x + 2}$$



Ten ostatni zapis będzie wykorzystywany w matematyce wyższej, między innymi przy obliczaniu całek z funkcji wymiernych.

2. a) $x^3 - 10x^2 + x - 10 = 0$

Rozwiązując dowolne równanie powinniśmy rozpocząć od ustalenia jego dziedziny. W przypadku dowolnego równania polegającego na wskazaniu miejsc zerowych wielomianu, dziedziną będzie cały zbiór liczb rzeczywistych, ponieważ wstawienie dowolnej liczby za niewiadomą x daje zawsze poprawny zapis. Zatem sformułowanie:

$$D = \mathbb{R}$$

będzie obowiązywało we wszystkich przykładach tego zadania i nie będziemy go powtarzać.

Najprostsza metoda rozwiązywania równań wielomianowych polega na rozłożeniu wielomianu na czynniki przy pomocy elementarnych przekształceń, takich jak wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias, grupowanie wyrazów oraz stosowanie wzorów skróconego mnożenia. Mamy zatem:

$$\begin{aligned}x^3 - 10x^2 + x - 10 &= x^2(x - 10) + (x - 10) \\&= (x - 10)(x^2 + 1)\end{aligned}$$

Oczywiście, iloczyn jest równy zero, wtedy i tylko wtedy gdy dowolny jego czynnik się zeruje, zatem dostajemy:

$$(x - 10)(x^2 + 1) = 0 \iff x - 10 = 0 \vee x^2 + 1 = 0$$

Ponieważ równanie $x^2 + 1 = 0$ jest sprzeczne, zatem rozważamy tylko

$$x - 10 = 0 \iff x = 10,$$





co oznacza, że jedynym rozwiązaniem równania $x^3 - 10x^2 + x - 10 = 0$ jest $x = 10$.

b) $x^3 - 4x^2 - 25x + 100 = 0$

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - 25x + 100 &= x^2(x - 4) - 25(x - 4) \\ &= (x - 4)(x^2 - 25) = (x - 4)(x + 5)(x - 5) \end{aligned}$$

Mamy zatem trzy rozwiązania $x = -5 \vee x = 4 \vee x = 5$.

c) $x^5 - 36x^3 - x^2 + 36 = 0$

$$\begin{aligned} x^5 - 36x^3 - x^2 + 36 &= x^3(x^2 - 36) - (x^2 - 36) \\ &= (x^2 - 36)(x^3 - 1) \\ &= (x + 6)(x - 6)(x - 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Ponieważ dla ostatniego czynnika będącego funkcją kwadratową

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, uzyskaliśmy już najprostszy rozkład wielomianu na czynniki, wobec tego zbiór rozwiązań równania jest następujący:

$$\{-6, 1, 6\}$$

d) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 6x + 8 &= x^3 + 8 - 3x^2 - 6x \\ &= (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 3x(x + 2) \\ &= (x + 2)((x^2 - 2x + 4) - 3x) \\ &= (x + 2)(x^2 - 5x + 4) \end{aligned}$$

Mamy teraz:

$$\Delta = 24 - 16 = 9 \implies x_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{5+3}{2} = 4,$$

dostajemy więc pełny rozkład wielomianu na czynniki:

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x + 2)(x - 1)(x - 4)$$

W takim razie równanie ma trzy rozwiązania $x = -2 \vee x = 1 \vee x = 4$.

e) $2x^4 + 3x^3 + 3x - 2 = 0$

$$\begin{aligned} 2x^4 + 3x^3 + 3x - 2 &= 2x^4 - 2 + 3x^3 + 3x = 2(x^4 - 1) + 3x(x^2 + 1) \\ &= 2(x^2 - 1)(x^2 + 1) + 3x(x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)(2(x^2 - 1) + 3x) = (x^2 + 1)(2x^2 - 2 + 3x) \\ &= (x^2 + 1)(2x^2 + 3x - 2) \end{aligned}$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25 \implies x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2, \quad x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$

Oczywiście, czynnik $x^2 + 1$ nie ma miejsc zerowych, zatem równanie ma dwa rozwiązania: $x = -2 \vee x = \frac{1}{2}$.

f) $3x^4 - 7x^3 + 7x - 3 = 0$

$$\begin{aligned} 3x^4 - 7x^3 + 7x - 3 &= 3x^4 - 3 - 7x^3 + 7x = 3(x^4 - 1) - 7x(x^2 - 1) \\ &= 3(x^2 - 1)(x^2 + 1) - 7x(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(3(x^2 + 1) - 7x) = (x^2 - 1)(3x^2 + 3 - 7x) \\ &= (x + 1)(x - 1)(3x^2 - 7x + 3) \end{aligned}$$

$$\Delta = 49 - 36 = 13 \implies x_1 = \frac{7 - \sqrt{13}}{6}, x_2 = \frac{7 + \sqrt{13}}{6}$$

Dostajemy ostatecznie cztery rozwiązania równania:

$$x = -1 \vee x = \frac{7 - \sqrt{13}}{6} \vee x = 1 \vee x = \frac{7 + \sqrt{13}}{6}$$

g) $x^3 - 13x - 12 = 0$

$$\begin{aligned} x^3 - 13x - 12 &= x^3 - x - 12x - 12 \\ &= x(x^2 - 1) - 12(x + 1) \\ &= x(x + 1)(x - 1) - 12(x + 1) \\ &= (x + 1)(x(x - 1) - 12) \\ &= (x + 1)(x^2 - x - 12) \\ &= (x + 1)(x + 3)(x - 4) \end{aligned}$$

$$x \in \{-3, -1, 4\}$$

h) $x^4 - 10x^2 + 16 = 0$

Nie zawsze jednak przekształcenia zastosowane w powyższych przykładach są łatwe do zauważania. Niekiedy udaje się wykorzystać inne metody, na przykład gdy wielomian zawiera tylko potęgi o wykładniku parzystym, skuteczne może być podstawienie nowej zmiennej. Podstawmy tutaj $t = x^2$, dostajemy wówczas:

$$\begin{aligned} x^4 - 10x^2 + 16 &= t^2 - 10t + 16 = (t - 2)(t - 8) \\ &= (x^2 - 2)(x^2 - 8) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Mamy więc zbiór czterech rozwiązań równania:

$$x \in \{-2\sqrt{2}, -2, 2, 2\sqrt{2}\}$$

i) $x^7 - 26x^4 - 27x = 0$

Podstawienie zastosowane w poprzednim przykładzie zawsze upraszcza równanie, w którym wielomian ma tylko potęgi o wykładnikach parzystych. Również w innych sytuacjach podstawienia mogą okazać się skuteczne.

Możemy tutaj, po wyłączeniu czynnika x przed nawias, podstawić $t = x^3$, potem skorzystać ze wzorów na sumę bądź różnicę trzecich potęg, otrzymując:

$$\begin{aligned} x^7 - 26x^4 - 27x &= x(x^6 - 26x^3 - 27) = x((x^3)^2 - 26x^3 - 27) = x(t^2 - 26t - 27) \\ &= x(t + 1)(t - 27) = x(x^3 + 1)(x^3 - 27) \\ &= x(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 3)(x^2 + 3x + 9) \end{aligned}$$

Obie funkcje kwadratowe są już nierozkładalne, bowiem:

$$\Delta_1 = 1 - 4 = -3 < 0, \quad \Delta_2 = 9 - 36 = -27 < 0,$$

zatem mamy trzy rozwiązania:

$$x = -1 \vee x = 0 \vee x = 3$$

j) $x^3 - 6x^2 + 7x - 10 = 0$

Najogólniejsza, spośród omawianych w szkole, metoda rozkładania wielomianów o współczynnikach całkowitych na czynniki jest oparta na następującym twierdzeniu.

Twierdzenie

Niech będzie dany wielomian:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie wszystkie współczynniki $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ są liczbami całkowitymi oraz $a_n \neq 0$. Jeśli wielomian W ma pierwiastek będący liczbą wymierną, to jest on postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p jest dzielnikiem a_0 , zaś q jest dzielnikiem a_n .

Podamy jeszcze szczególny przypadek powyższego twierdzenia, dotyczący wariantu, w którym współczynnik przy najwyższej potędze wynosi 1.

Twierdzenie

Niech będzie dany wielomian:

$$W(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie wszystkie współczynniki $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ są liczbami całkowitymi. Jeśli wielomian W ma pierwiastek będący liczbą wymierną, to jest on liczbą całkowitą, która jest dzielnikiem a_0 .

Zwróćmy uwagę, że powyższe twierdzenia podają jedynie warunki na istnienie wymiernych pierwiastków wielomianu, nic nie mówiąc o możliwych pierwiastkach niewymiernych. Na przykład, stosując je do bardzo prostego wielomianu stopnia drugiego:

$$W(x) = x^2 - 3$$

dostajemy informację, że jedynymi możliwymi pierwiastkami wymiernymi wielomianu



W mogą być dzielniki liczby 3, czyli -3 , -1 , 1 lub 3 . Łatwo można sprawdzić, że żadna z tych liczb nie jest miejscem zerowym dla W . Natomiast nieskomplikowany rozkład na czynniki:

$$W(x) = x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

oznacza, że mamy dwa pierwiastki niewymierne.

Zastosujemy przytoczone wyżej twierdzenie do rozwiązania równania

$$x^3 - 6x^2 + 7x - 10 = 0$$

Współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu W wynosi 1. Zatem, jeśli istnieją pierwiastki całkowite, to muszą być dzielnikami wyrazu wolnego. Sprawdzamy więc kolejno dzielniki liczby 10 czyli: 1 , 2 , 5 , 10 , -1 , -2 , -5 , -10 .

$$W(1) = 1 - 6 + 7 - 10 = -8 \neq 0,$$

$$W(2) = 8 - 24 + 14 - 10 = -12 \neq 0$$

$$W(5) = 125 - 150 + 35 - 10 = 0$$

Znaleźliśmy (odgadliśmy) jeden z pierwiastków wielomianu W .

Oznacza to, że nasz wielomian jest podzielny przez dwumian $x - 5$. Dzielenie to przeprowadzimy przy pomocy schematu Hornera, sporządzając poniższą tabelkę:

	1	-6	7	-10
5	1	-1	2	0

Otrzymaliśmy zatem następujący rozkład:

$$W(x) = x^3 - 6x^2 + 7x - 10 = (x - 5)(x^2 - x + 2),$$

który okazuje się już najprostszym możliwym rozkładem,

gdyż $\Delta = 1 - 8 < 0$.

Równanie ma wobec tego tylko jedno rozwiązanie $x = 5$.

k) $x^3 - 4x^2 - 15x - 6 = 0$

Sprawdzając kolejne podzielniki wyrazu wolnego, czyli:

1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6, ustalimy w pewnym momencie, że:

$$P(-2) = -8 - 16 + 30 - 6 = 0$$

Stosując schemat Hornera, dzielimy więc wielomian przez $(x + 2)$:

	1	-4	-15	-6
-2	1	-6	-3	0

co daje nam rozkład:

$$x^3 - 4x^2 - 15x - 6 = (x + 2)(x^2 - 6x - 3),$$

Ponieważ drugi czynnik jest funkcją kwadratową, zatem wystarczy teraz obliczyć:

$$\Delta = 36 + 12 = 48,$$

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{48}}{2} = \frac{6 - 4\sqrt{3}}{2} = 3 - 2\sqrt{3}, \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{48}}{2} = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{2} = 3 + 2\sqrt{3}.$$

Mamy więc pełny rozkład na iloczyn:

$$\begin{aligned}x^3 - 4x^2 - 15x - 6 &= (x + 2)(x^2 - 6x - 3) \\ &= (x + 2)(x - 3 + 2\sqrt{3})(x - 3 - 2\sqrt{3})\end{aligned}$$

Daje to nam trójelementowy zbiór rozwiązań:

$$x \in \{-2, 3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}\}$$

l) $x^4 - 5x^3 - 32x^2 + 72 = 0$

Wyraz wolny 72 ma dosyć dużo dzielników, przy odrobinie szczęścia być może trafimy w miarę szybko na:

$$W(-2) = (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^3 - 32 \cdot (-2)^2 + 72 = 16 + 40 - 128 + 72 = 0$$

Przeprowadzamy dzielenie wielomianów:

	1	-5	-32	0	72
-2	1	-7	-18	36	0

$$x^4 - 5x^3 - 32x^2 + 72 = (x + 2)(x^3 - 7x^2 - 18x + 36)$$

Dla powstałego wielomianu $G(x) = x^3 - 7x^2 - 18x + 36$ ponownie testujemy dzielniki wyrazu wolnego, prędzej czy później ustalając, że:

$$G(-3) = (-3)^3 - 7 \cdot (-3)^2 - 18 \cdot (-3) + 36 = -27 - 63 + 54 + 36 = 0$$

Ponownie dzielimy:

	1	-7	-18	36
-3	1	-10	12	0

$$x^4 - 5x^3 - 32x^2 + 72 = (x + 2)(x^3 - 7x^2 - 18x + 36) = (x + 2)(x + 3)(x^2 - 10x + 12)$$

$$\Delta = 100 - 48 = 52 \implies x_1 = \frac{10 - \sqrt{52}}{2} = 5 - \sqrt{13}, \quad x_2 = \frac{10 + \sqrt{52}}{2} = 5 + \sqrt{13}$$

Mamy zatem pełny rozkład:

$$x^4 - 5x^3 - 32x^2 + 72 = (x + 2)(x + 3)(x - 5 + \sqrt{13})(x - 5 - \sqrt{13})$$

oraz cztery rozwiązania równania:

$$x = -3 \quad \vee \quad x = -2 \quad \vee \quad x = 5 - \sqrt{13} \quad \vee \quad x = 5 + \sqrt{13}$$

m) $2x^3 + 3x^2 + 15x + 7 = 0$

Ponieważ współczynnik przy najwyższej potęgze jest różny od jeden, musimy skorzystać z najogólniejszej postaci twierdzenia. Wypiszemy najpierw wszystkie dzielniki p oraz q , odpowiednio wyrazu wolnego czyli liczby 7 i współczynnika przy najwyższej potęgze czyli liczby 2:

$$p \in \{\pm 1, \pm 7\}$$

$$q \in \{\pm 1, \pm 2\}$$

Tworzymy teraz wszystkie możliwe ilorazy postaci $\frac{p}{q}$:

$$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 7, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{7}{2}\}$$

Twierdzenie o pierwiastkach wielomianu mówi, że jeśli wielomian V ma pierwiastek wymierny, to będzie to jedna z powyższych ośmiu liczb. Sprawdzamy je zatem, aż natrafimy na:

$$V\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{8} + \frac{3}{4} - \frac{15}{2} + 7 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{30}{4} + 7 = 0$$

Dzielimy więc wielomian V przez $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ i dostajemy:

	2	3	15	7
$-\frac{1}{2}$	2	2	14	0

Co oznacza, że

$$V(x) = 2x^3 + 3x^2 + 15x + 7 = \left(x + \frac{1}{2}\right) (2x^2 + 2x + 14) = 2 \left(x + \frac{1}{2}\right) (x^2 + x + 7)$$

Czynnik będący funkcją kwadratową nie rozkłada się już, ponieważ :

$$\Delta = 1 - 28 = -27,$$

Zatem równanie ma jedno rozwiązanie $x = -\frac{1}{2}$.

n) $5x^3 - 12x^2 - 16x + 8 = 0$

Tak jak w poprzednim przykładzie, zapisujemy odpowiednie podzielniki, otrzymując:

$$p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$$

$$q \in \{\pm 1, \pm 5\}$$

$$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{2}{5}, \pm \frac{4}{5}, \pm \frac{8}{5}\}$$

Jeśli wielomian $P(x) = 5x^3 - 12x^2 - 16x + 8$ ma pierwiastek wymierny, wówczas będzie to któraś z powyższych szesnastu liczb.

Okazuje się, że:

$$P\left(\frac{2}{5}\right) = 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 - 12 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 16 \cdot \frac{2}{5} + 8 = \frac{40}{125} - \frac{48}{25} - \frac{32}{5} + 8 = \frac{40}{125} - \frac{240}{125} - \frac{800}{125} + \frac{1000}{125} = 0$$

	5	-12	-16	8
$\frac{2}{5}$	5	-10	-20	0

$$5x^3 - 12x^2 - 16x + 8 = \left(x - \frac{2}{5}\right) (5x^2 - 10x - 20) = 5 \left(x - \frac{2}{5}\right) (x^2 - 2x - 4)$$

$$\Delta = 4 + 16 = 20 \implies x_1 = \frac{2 - \sqrt{20}}{2} = 1 - \sqrt{5}, \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{20}}{2} = 1 + \sqrt{5}$$

$$5x^3 - 12x^2 - 16x + 8 = 5 \left(x - \frac{2}{5}\right) (x^2 - 2x - 4) = 5 \left(x - \frac{2}{5}\right) (x - 1 + \sqrt{5})(x - 1 - \sqrt{5})$$

Mamy ostatecznie trójelementowy zbiór rozwiązań:

$$x \in \{1 - \sqrt{5}, \frac{2}{5}, 1 + \sqrt{5}\}$$

o) $x^4 - 18x^3 + 82x^2 - 18x + 1 = 0$

Okazuje się, że wszystkie prezentowane dotychczas metody rozwiązywania równań okażą się w tym przypadku nieskuteczne. Ponieważ współczynniki wielomianu zarówno przy najwyższej jak i najniższej potęgde wynoszą 1, zatem jedyne wymierne rozwiązania tego równania mogą być równe 1 lub -1. Po podstawieniu tych liczb do wzoru wielomianu widzimy jednak, że nie będą one rozwiązaniami. Zatem równanie jest albo sprzeczne albo jego rozwiązania są liczbami niewymiernymi.

Zauważmy tutaj bardzo szczególną postać wielomianu po lewej stronie równania. Jest on bowiem symetryczny, tzn. $a_0 = a_4$ oraz $a_1 = a_3$. Wykorzystamy ten fakt, dzieląc równanie stronami przez x^2 , ta operacja jest prawidłowa, ponieważ rozwiązaniem nie jest liczba 0. W wyniku tego manewru dostajemy:

$$x^2 - 18x + 82 - \frac{18}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 18x - \frac{18}{x} + 82 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 18\left(x + \frac{1}{x}\right) + 82 = 0$$

Uzyskana postać równania pozwala teraz na podstawienie nowej zmiennej:

$$x + \frac{1}{x} = t,$$

ponieważ:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2},$$

zatem możemy zastąpić:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$$

W takim razie, sprowadziliśmy nasz problem do równania kwadratowego:

$$t^2 - 2 - 18t + 82 = 0$$

$$t^2 - 18t + 80 = 0$$

$$\Delta = 324 - 320 = 4, \quad t_1 = \frac{18-2}{2} = 8, \quad t_2 = \frac{18+2}{2} = 10$$

Wracając do zmiennej x , dostajemy:

$$x + \frac{1}{x} = 8 \quad \vee \quad x + \frac{1}{x} = 10$$

$$x^2 + 1 = 8x \quad \vee \quad x^2 + 1 = 10x$$

Rozwiązanie powyższych dwóch nieskomplikowanych równań kwadratowych kończy nasze obliczenia:

$$x^2 - 8x + 1 = 0, \quad \Delta = 64 - 4 = 60, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$$x_1 = \frac{8-2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15}, \quad x_2 = \frac{8+2\sqrt{15}}{2} = 4 + \sqrt{15}$$

$$x^2 - 10x + 1 = 0, \quad \Delta = 100 - 4 = 96, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

$$x_3 = \frac{10-4\sqrt{6}}{2} = 5 - 2\sqrt{6}, \quad x_4 = \frac{10+4\sqrt{6}}{2} = 5 + 2\sqrt{6}$$

Podsumowując, mamy czteroelementowy zbiór rozwiązań:

$$\{5 - 2\sqrt{6}, 4 - \sqrt{15}, 4 + \sqrt{15}, 5 + 2\sqrt{6}\}$$

3. Rozłożyć wielomiany na czynniki

a) $W(x) = x^4 + 2025$

Rozwiązanie równań wielomianowych jest oczywiście często związane z technikami rozkładu wielomianu na postać iloczynu ale niekiedy rozwiązanie równania jest łatwiejsze niż rozłożenie wielomianu na czynniki. Gdybyśmy bowiem rozpatrywali równanie:

$$x^4 + 2025 = 0,$$

to zapisując

$$x^4 = -2025,$$

widzimy natychmiast, że jest ono sprzeczne, niewiadoma podniesiona do potęgi parzystej nie może dać wartości ujemnej.

Należy jednak pamiętać, że każdy wielomian stopnia co najmniej trzeciego daje się rozłożyć na czynniki. Inaczej mówiąc, wielomiany nierozkładalne to tylko funkcje liniowe oraz kwadratowe z ujemną deltą.

Rozkład na czynniki jest często znacznie trudniejszy do uzyskania niż rozwiązanie równania, tutaj dostaniemy go, przeprowadzając kilka manewrów wykorzystujących proste wzory skróconego mnożenia:

$$\begin{aligned} x^4 + 2025 &= x^4 + 45^2 = x^4 + 90x^2 - 90x^2 + 45^2 = (x^2)^2 + 90x^2 + 45^2 - 90x^2 \\ &= (x^2 + 45)^2 - (\sqrt{90}x)^2 = (x^2 + 45 + 3\sqrt{10}x)(x^2 + 45 - 3\sqrt{10}x) \\ &= (x^2 + 3\sqrt{10}x + 45)(x^2 - 3\sqrt{10}x + 45) \end{aligned}$$

Oczywiście, obie funkcje kwadratowe są już nierozkładalne.

b) $H(x) = x^6 + 64$

W pierwszej kolejności skorzystamy ze wzoru na sumę trzecich potęg:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

kładąc w nim $a = x^2$, $b = 4$, a następnie dla powstałego wielomianu stopnia czwartego przeprowadzimy rozumowanie analogiczne do poprzedniego przykładu:

$$\begin{aligned}x^6 + 64 &= (x^2)^3 + 4^3 = (x^2 + 4)(x^4 - 4x^2 + 16) \\&= (x^2 + 4)(x^4 + 8x^2 - 8x^2 - 4x^2 + 16) = (x^2 + 4)(x^4 + 8x^2 + 16 - 8x^2 - 4x^2) \\&= (x^2 + 4)((x^4 + 8x^2 + 16) - 12x^2) = (x^2 + 4)((x^2 + 4)^2 - (\sqrt{12}x)^2) \\&= (x^2 + 4)(x^2 + 4 - \sqrt{12}x)(x^2 + 4 + \sqrt{12}x) \\&= (x^2 + 4)(x^2 - 2\sqrt{3}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{3}x + 4)\end{aligned}$$

Uzyskaliśmy najprostszy możliwy rozkład, ponieważ wszystkie trzy czynniki kwadratowe są już nierozkładalne.

c) $P(x) = x^8 + 64$

$$\begin{aligned}x^8 + 64 &= x^8 + 16x^4 - 16x^4 + 64 = x^8 + 16x^4 + 64 - 16x^4 \\&= (x^4 + 8)^2 - (4x^2)^2 = ((x^4 + 8) + 4x^2)((x^4 + 8) - 4x^2) \\&= (x^4 + 4x^2 + 8)(x^4 - 4x^2 + 8) \\&= (x^4 + 4\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2}x^2 + 8 + 4x^2)(x^4 + 4\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2}x^2 + 8 - 4x^2) \\&= (x^4 + 4\sqrt{2}x^2 + 8 - 4\sqrt{2}x^2 + 4x^2)(x^4 + 4\sqrt{2}x^2 + 8 - 4\sqrt{2}x^2 - 4x^2) \\&= ((x^4 + 4\sqrt{2}x^2 + 8) - 4x^2(\sqrt{2} - 1))((x^4 + 4\sqrt{2}x^2 + 8) - 4x^2(\sqrt{2} + 1)) \\&= ((x^2 + 2\sqrt{2})^2 - (2x\sqrt{\sqrt{2} - 1})^2)((x^2 + 2\sqrt{2})^2 - (2x\sqrt{\sqrt{2} + 1})^2) \\&= ((x^2 + 2\sqrt{2} + 2x\sqrt{\sqrt{2} - 1})(x^2 + 2\sqrt{2} - 2x\sqrt{\sqrt{2} - 1})) \\&\quad \cdot ((x^2 + 2\sqrt{2} + 2x\sqrt{\sqrt{2} + 1})(x^2 + 2\sqrt{2} - 2x\sqrt{\sqrt{2} + 1})) \\&= ((x^2 + 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}x + 2\sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}x + 2\sqrt{2})) \\&\quad \cdot ((x^2 + 2\sqrt{\sqrt{2} + 1}x + 2\sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt{\sqrt{2} + 1}x + 2\sqrt{2}))\end{aligned}$$



Wszystkie cztery funkcje kwadratowe tworzące powyższy rozkład mają delty ujemne, więc uzyskany rozkład na postać iloczynu jest najprostszy.

Funkcje wymierne i niewymierne

Zadania

1. Rozwiązać równania:

a) $\frac{x-2}{x-5} = 2 + \frac{3}{x-5}$

b) $\frac{14}{x^2-9} + \frac{4-x}{3+x} = \frac{7}{x+3} - \frac{1}{3-x}$

c) $\frac{x+3}{x+2} - \frac{x-3}{x-2} = 1 + \frac{x^2}{x^2-4}$

d) $\frac{7+18x}{x^3-1} = \frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1}$

e) $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x+3} = 1$

f) $\frac{4x^2+3}{x^2+4x+3} + \frac{3x^2-5}{x^2+5x+6} = \frac{5x-17}{x^2+3x+2} + \frac{38x^2+25x+2}{x^3+6x^2+11x+6}$

2. Przekształcić poniższe wyrażenia do najprostszej postaci:

a) $\frac{1}{x^2-2x+2} - \frac{1}{x^2+2x+2}$

b) $\frac{x+2}{x^2-4x+3} - \frac{x+3}{x^2-3x+2}$

3. Wyznaczyć wartości stałych $A, B, C \dots$ tak, aby prawdziwe były równości:

a) $\frac{7x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$

b) $\frac{3x^2-3x+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

c) $\frac{5x+2}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

4. Rozwiązać równania:

a) $2\sqrt{x+5} = x+2$





b) $\sqrt{10-x} + \sqrt{x+3} = 5$

c) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} = 4$

d) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$

e) $\sqrt{x+14} - \sqrt{3x-2} = 2$

f) $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0$

Rozwiązania

1. a) $\frac{x-2}{x-5} = 2 + \frac{3}{x-5}$

W przypadku równań wymiernych rozpoczynamy od ustalenia dziedziny. Oczywiście, warunkiem ją wyznaczającym jest tutaj $x - 5 \neq 0$, bowiem wyrażenie w mianowniku ułamka nie może być równe zero.

Zatem $D = \mathbb{R} \setminus \{5\} = (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$.

Uproszczenie postaci równania dostaniemy likwidując zapis ułamkowy, co zrealizujemy mnożąc stronami przez $x - 5$. Poprawność tej operacji zapewnia nam dziedzina, gdyż nie ma zagrożenia mnożeniem stronami przez zero.

$$x - 2 = 2(x - 5) + 3$$

$$x - 2 = 2x - 10 + 3$$

$$x = 5$$

Zauważmy jednak, że wartość $x = 5$ nie należy do dziedziny, zaś innych rozwiązań nie ma. W takim razie równanie jest sprzeczne.

b) $\frac{14}{x^2-9} + \frac{4-x}{3+x} = \frac{7}{x+3} - \frac{1}{3-x}$



$$D : x^2 - 9 \neq 0 \quad \wedge \quad x + 3 \neq 0 \quad \wedge \quad 3 - x \neq 0$$

Ponieważ $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$, zatem:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

Teraz, po nieznacznym uporządkowaniu postaci równania:

$$\frac{14}{(x+3)(x-3)} + \frac{4-x}{x+3} = \frac{7}{x+3} + \frac{1}{x-3}$$

mnożymy je stronami przez $(x+3)(x-3)$:

$$14 + (4-x)(x-3) = 7(x-3) + x+3$$

$$14 + 4x - 12 - x^2 + 3x = 7x - 21 + x + 3$$

$$-x^2 + 7x + 2 = 8x - 18$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$\Delta = 1 + 80 = 81 \implies x_1 = \frac{-1-9}{2} = -5, \quad x_2 = \frac{-1+9}{2} = 4$$

Ponieważ $x_1, x_2 \in D$, zatem równanie ma dwa rozwiązania $x = -5$ lub $x = 4$.

$$c) \frac{x+3}{x+2} - \frac{x-3}{x-2} = 1 + \frac{x^2}{x^2-4}$$

$$D : x - 2 \neq 0 \quad \wedge \quad x + 2 \neq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 4 \neq 0$$

Oczywiście $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, zatem:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$(x+3)(x-2) - (x-3)(x+2) = x^2 - 4 + x^2$$

$$x^2 - 2x + 3x - 6 - (x^2 + 2x - 3x - 6) = 2x^2 - 4$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 \implies x_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Ponieważ $x_2 = 2 \notin D$, zatem jedynym rozwiązaniem równania jest $x = -1$.

$$d) \frac{7+18x}{x^3-1} = \frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1}$$

$$D : x^3 - 1 \neq 0 \wedge x^2 - 1 \neq 0 \wedge x^2 + x + 1 \neq 0$$

Ponieważ:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1), \quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

oraz dla funkcji kwadratowej $x^2 + x + 1$, widzimy, że $\Delta < 0$, zatem dziedzina jest zbiorem:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$\frac{7+18x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{30}{(x-1)(x+1)} - \frac{13}{x^2+x+1}$$

Mnożymy równanie stronami przez $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$, otrzymując po uproszczeniach równanie kwadratowe:

$$(7+18x)(x+1) = 30(x^2+x+1) - 13(x+1)(x-1)$$

$$7x + 7 + 18x^2 + 18x = 30x^2 + 30x + 30 - 13x^2 + 13$$

$$x^2 - 5x - 36 = 0$$

$$\Delta = 25 + 144 = 169 \implies x_1 = \frac{5-13}{2} = -4, \quad x_2 = \frac{5+13}{2} = 9$$

$x_1, x_2 \in D$, zatem mamy dwa rozwiązania:

$$x = -4 \vee x = 9$$

$$e) \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x+3} = 1$$

$$D : x+1 \neq 0 \wedge x+2 \neq 0 \wedge x+3 \neq 0$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1\}$$

$$(x+2)(x+3) + x(x+1)(x+3) + (x+1)(x+2) = (x+1)(x+2)(x+3)$$

$$x^2 + 2x + 3x + 6 + x(x^2 + 3x + x + 3) + x^2 + 2x + x + 2 = (x+1)(x^2 + 2x + 3x + 6)$$

$$2x^2 + 8x + 8 + x^3 + 4x^2 + 3x = x^3 + 5x^2 + 6x + x^2 + 5x + 6$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 8 = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

$$8 = 6$$

Wszystkie wyrażenia zawierające zmienną x uległy redukcji, otrzymaliśmy zależność nieprawdziwą, zatem równanie jest sprzeczne.

$$f) \frac{4x^2 + 3}{x^2 + 4x + 3} + \frac{3x^2 - 5}{x^2 + 5x + 6} = \frac{5x - 17}{x^2 + 3x + 2} + \frac{38x^2 + 25x + 2}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$$

$$D : x^2 + 4x + 3 \neq 0 \wedge x^2 + 5x + 6 \neq 0 \wedge x^2 + 3x + 2 \neq 0 \wedge x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \neq 0$$

W tym zadaniu już samo wyznaczenie dziedziny wymaga nieco wysiłku,
o ile dla wszystkich funkcji kwadratowych sprawa jest prosta:

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3), \quad x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3), \quad x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2),$$

to rozłożenie na czynniki wielomianu $W(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ wymaga zastosowania poznanych wcześniej metod.

Badając dzielniki wyrazu wolnego, czyli liczby 6 sprawdzamy, że:

$$W(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 - 11 + 6 = 0$$

i kontynuujemy, dzieląc wielomian $W(x)$ przez $x + 1$. Oczywiście najlepszym sposobem jest wykorzystanie do tego schematu Hornera:

	1	6	11	6
-1	1	5	6	0

Mamy więc:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x^2 + 5x + 6) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

Uzyskane rozkłady wykorzystamy za chwilę do dalszego przekształcania naszego równania, natomiast mamy wyznaczoną dziedzinę:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1\}$$

Zapisując mianowniki ułamków w postaci iloczynów:

$$\frac{4x^2 + 3}{(x+1)(x+3)} + \frac{3x^2 - 5}{(x+2)(x+3)} = \frac{5x - 17}{(x+1)(x+2)} + \frac{38x^2 + 25x + 2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

widzimy, że dostaniemy uproszczenia mnożąc równanie stronami przez $(x+1)(x+2)(x+3)$. Mamy więc:

$$(4x^2 + 3)(x+2) + (3x^2 - 5)(x+1) = (5x - 17)(x+3) + 38x^2 + 25x + 2$$

$$4x^3 + 8x^2 + 3x + 6 + 3x^3 + 3x^2 - 5x - 5 = 5x^2 + 15x - 17x - 51 + 38x^2 + 25x + 2$$

$$7x^3 - 32x^2 - 25x + 50 = 0$$

Musimy na koniec rozwiązać powstałe po uproszczeniach równanie stopnia trzeciego, na szczęście łatwo wskazać, że jednym z pierwiastków jest $x = 1$. Wykonujemy zatem dzielenie:

	7	-32	-25	50
1	7	-25	-50	0

Dostajemy zatem:

$$(x-1)(7x^2 - 25x - 50) = 0$$

$$\Delta = 625 + 1400 = 2025 \implies x_1 = \frac{25-45}{14} = \frac{-20}{14} = -\frac{10}{7}, \quad x_2 = \frac{25+45}{14} = 5$$

Ponieważ wszystkie obliczone wartości należą do dziedziny, mamy trzy rozwiązania:

$$x = -\frac{10}{7} \quad \vee \quad x = 1 \quad \vee \quad x = 5$$

2. a) Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} - \frac{1}{x^2 + 2x + 2} &= \frac{x^2 + 2x + 2}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)} - \frac{x^2 - 2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 2 - (x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)} = \frac{4x}{(x^2 + 2)^2 - (2x)^2} \\ &= \frac{4x}{x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2} = \frac{4x}{x^4 + 4} \end{aligned}$$

b) W celu znalezienia możliwie najprostszego wspólnego mianownika zapisujemy najpierw obie funkcje kwadratowe w postaci iloczynu:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^2-4x+3} - \frac{x+3}{x^2-3x+2} &= \frac{x+2}{(x-1)(x-3)} - \frac{x+3}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-3)(x-2)} - \frac{(x+3)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{(x^2-4) - (x^2-9)}{(x-1)(x-3)(x-2)} = \frac{5}{(x-1)(x-3)(x-2)} \end{aligned}$$

3. a) $\frac{7x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$

Aby wyznaczyć współczynniki A, B rozkładamy mianownik na czynniki:

$$\frac{7x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

i mnożymy stronami otrzymaną równość przez $(x-2)(x-3)$. Dostajemy więc:

$$7x + 1 = A(x-3) + B(x-2).$$

Najprostszym sposobem rozwiązania problemu jest wykorzystanie faktu, że mamy do czynienia z zależnością funkcyjną, czyli wyrażenia po obu stronach są równe dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Możemy zatem wstawić do niej dowolną wartość niewiadomej x . Oczywiście, wstawimy takie wartości aby uzyskać możliwie najkorzystniejsze uproszczenia. Wstawiając zatem $x = 2$ otrzymujemy:

$$7 \cdot 2 + 1 = A(2 - 3) + B(2 - 2)$$

$$15 = -A \implies A = -15$$

Wstawiając teraz $x = 3$ dostajemy:

$$7 \cdot 3 + 1 = A(3 - 3) + B(3 - 2)$$

$$22 = B \implies B = 22.$$

Otrzymujemy więc ostatecznie:

$$\frac{7x + 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-15}{x - 2} + \frac{22}{x - 3}$$

Zaprezentowane tutaj, proste techniki obliczeniowe będą wykorzystywane w matematyce wyższej w procesie obliczania całek.

$$\text{b) } \frac{3x^2 - 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

$$\frac{3x^2 - 3x + 1}{x(x^2 - 2x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

$$\frac{3x^2 - 3x + 1}{x(x - 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}.$$

Mnożąc stronami przez $x(x-1)^2$ dostajemy:

$$3x^2 - 3x + 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

Tak jak w poprzednim przykładzie, możemy podstawić za niewiadomą x dowolne liczby, wstawimy zatem takie, aby uzyskać uproszczenia. W takim razie, dla $x = 0$ mamy:

$$0 + 1 = A(-1)^2 + B \cdot 0 \cdot (-1) + C \cdot 0 \implies A = 1,$$

natomiast dla $x = 1$ otrzymujemy:

$$3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = A(1-1)^2 + B \cdot 1 \cdot (1-1) + C \cdot 1 \implies C = 1$$

W celu znalezienia B , porównamy współczynniki przy x^2 funkcji kwadratowych znajdujących się po obydwu stronach równości:

$$3x^2 - 3x + 1 = A(x^2 - 2x + 1) + Bx^2 - Bx + Cx,$$

$$3x^2 - 3x + 1 = x^2(A + B) + x(-2A - B + C) + A.$$

Daje to nam:

$$A + B = 3,$$

a ponieważ wyliczyliśmy wcześniej, że $A = 1$, zatem $B = 2$. Dostajemy więc ostatecznie:

$$\frac{3x^2 - 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$c) \frac{5x+2}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Zauważmy najpierw, że na podstawie wzoru na sumę trzecich potęg, mamy:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1),$$

zatem nierówność:

$$\frac{5x+2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

mnożymy stronami przez $(x+1)(x^2-x+1)$ i dostajemy:

$$5x+2 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1),$$

$$5x+2 = Ax^2 - Ax - A + Bx^2 + Bx + Cx + C,$$

$$5x+2 = (A+B)x^2 + (B+C-A)x + A+C.$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C-A=5 \\ A+C=2 \end{cases}$$

Z równania pierwszego i trzeciego otrzymujemy:

$$B = -A, \quad C = 2 - A,$$



zatem po wstawieniu do równania drugiego daje nam:

$$-A + 2 - A - A = 5,$$

co prowadzi do ostatecznego rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 3 \end{cases}$$

oraz poszukiwanej równości:

$$\frac{5x+2}{x^3+1} = \frac{-1}{x+1} + \frac{x+3}{x^2-x+1}$$

4. a) $2\sqrt{x+5} = x+2$

Warunkiem wyznaczającym dziedzinę równania jest $x+5 \geq 0$, bowiem wyrażenie pod pierwiastkiem kwadratowym nie może być ujemne. Zatem $D = [-5, +\infty)$. Uproszczenie równania wymaga zlikwidowania pierwiastka, co zostanie zrealizowane przez podniesienie stronami do kwadratu. Należy jednak pamiętać, że będzie to miało sens tylko wtedy, gdy obie strony równania będą tego samego znaku. Ponieważ lewa strona jest oczywiście nieujemna, zatem warunkiem rozwiązalności jest $x+2 \geq 0$, czyli $x \in [-2, +\infty)$. Przy takim założeniu, dostajemy:

$$(2\sqrt{x+5})^2 = (x+2)^2$$

$$4(x+5) = x^2 + 4x + 4$$

$$4x + 20 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 = 16 \implies x = 4 \vee x = -4$$



Zauważmy, że obie wyliczone wartości należą do dziedziny równania, jednakże tylko pierwsza z nich spełnia warunek związany z podniesieniem stronami do kwadratu. Zatem jedynym rozwiązaniem równania jest $x = 4$.

b) $\sqrt{10-x} + \sqrt{x+3} = 5$

Zaczynamy od wyznaczenia dziedziny:

$$D : 10 - x \geq 0 \quad \wedge \quad x + 3 \geq 0$$

$$D = [-3, 10]$$

Ponieważ obie strony są dodatnie, zatem możemy podnieść równanie stronami do kwadratu bez żadnych dodatkowych założeń.

$$\left(\sqrt{10-x} + \sqrt{x+3}\right)^2 = 25$$

$$10 - x + 2\sqrt{10-x} \cdot \sqrt{x+3} + x + 3 = 25$$

$$2\sqrt{10-x} \cdot \sqrt{x+3} = 25 - 10 - 3$$

$$\sqrt{10-x} \cdot \sqrt{x+3} = 6$$

Ponowne podniesienie stronami do kwadratu (nie wymagające żadnych założeń, ponieważ obie strony są nieujemne) spowoduje ostateczne pozbycie się pierwiastków, zatem dostaniemy do rozwiązania proste równanie kwadratowe

$$\left(\sqrt{10-x} \cdot \sqrt{x+3}\right)^2 = 36$$

$$(10-x)(x+3) = 36$$

$$10x + 30 - x^2 - 3x = 36$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Delta = 49 - 24 = 25 \implies x_1 = \frac{7-5}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{7+5}{2} = 6$$

Obie wartości należą do dziedziny, zatem równanie ma dwa rozwiązania $x = 1$ lub $x = 6$.

c) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} = 4$

$$D : x+1 \geq 0 \wedge x-7 \geq 0$$

$$D = [7, +\infty)$$

Możemy podnieść równanie stronami do kwadratu bez dodatkowych założeń, bowiem obie strony są dodatnie.

$$(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-7})^2 = 16$$

$$x+1 + 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-7} + x-7 = 16$$

$$2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-7} = 16 - 2x - 1 + 7$$

$$\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-7} = 11 - x$$

Kolejne podniesienie równania stronami do kwadratu wymaga spełnienia warunku $11 - x \geq 0$, czyli $x \in (-\infty, 11]$.

$$(\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-7})^2 = (11-x)^2$$

$$(x+1)(x-7) = 121 - 22x + x^2$$

$$x^2 - 7x + x - 7 = 121 - 22x + x^2$$

$$16x = 128 \implies x = 8$$

Wyliczona wartość należy do dziedziny, spełnia również warunek poprawności podniesienia do kwadratu, mamy zatem jedno rozwiązanie równania $x = 8$.

$$d) \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$$

$$D : 3x-2 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0$$

$$D = [1, +\infty)$$

$$(\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1})^2 = 9$$

$$3x-2 + 2\sqrt{3x-2} \cdot \sqrt{x-1} + x-1 = 9$$

$$2\sqrt{3x-2} \cdot \sqrt{x-1} = 12-4x$$

$$\sqrt{3x-2} \cdot \sqrt{x-1} = 6-2x$$

Teraz, podniesienie stronami do kwadratu wymaga spełnienia nierówności $6-2x \geq 0$, czyli $x \in (-\infty, 3]$.

$$(\sqrt{3x-2} \cdot \sqrt{x-1})^2 = (6-2x)^2$$

$$3x^2 - 3x - 2x + 2 = 36 - 24x + 4x^2$$

$$x^2 - 19x + 34 = 0$$

$$\Delta = 361 - 136 = 225 \implies x_1 = \frac{19-15}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{19+15}{2} = 17$$

Obie wyliczone wartości należą do dziedziny równania, jednakże tylko pierwsza z nich spełnia warunek związany z prawidłowym podniesieniem stronami do kwadratu. Zatem jedynym rozwiązaniem jest $x = 2$.

$$e) \sqrt{x+14} - \sqrt{3x-2} = 2$$

$$D : x + 14 \geq 0 \quad \wedge \quad 3x - 2 \geq 0$$

$$D = \left[\frac{2}{3}, +\infty \right)$$

Podniesienie stronami do kwadratu wymagałoby spełnienia założenia:

$$\sqrt{x+14} - \sqrt{3x-2} \geq 0$$

Aby uniknąć rozwiązywania powyższej nierówności, dokonamy nieznacznej modyfikacji naszego równania, przenosząc jeden z pierwiastków na drugą stronę:

$$\sqrt{x+14} = 2 + \sqrt{3x-2}$$

Teraz, obie strony są nieujemne, więc podniesienie do kwadratu realizujemy bez sprawdzania dodatkowych warunków:

$$\left(\sqrt{x+14} \right)^2 = \left(2 + \sqrt{3x-2} \right)^2$$

$$x + 14 = 4 + 4\sqrt{3x-2} + 3x - 2$$

$$4\sqrt{3x-2} = 12 - 2x$$

$$2\sqrt{3x-2} = 6 - x$$

Podnosimy stronami do kwadratu, przy założeniu $6 - x \geq 0$, czyli $x \in (-\infty, 6]$.

$$4(3x-2) = 36 - 12x + x^2$$

$$x^2 - 24x + 44 = 0$$

$$\Delta = 576 - 176 = 400 \implies x_1 = \frac{24-20}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{24+20}{2} = 22$$

Mimo, że obie wyliczone wartości należą do dziedziny równania, to drugą z nich odrzucamy, ponieważ nie spełnia warunku związanego z podniesieniem stronami do kwadratu. Zatem jedynym rozwiązaniem równania jest $x = 2$.

f) $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0$

W celu wyznaczenia dziedziny należy rozwiązać nierówność kwadratową:

$$D : 2x^2 + 3x + 9 \geq 0,$$

a ponieważ $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 9 < 0$ więc $D = \mathbb{R}$.

Po przeniesieniu pierwiastka na prawą stronę:

$$2x^2 + 3x + 3 = 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9},$$

równanie da się rozwiązać podnosząc je stronami do kwadratu (przy odpowiednich założeniach), jednakże po dość żmudnych przekształceniach, metoda ta sprowadza się do znalezienia pierwiastków wielomianu stopnia czwartego, co nie jest prostym zadaniem. Znacznym ułatwieniem będzie wykorzystanie szczególnej postaci naszego równania, umożliwiającej podstawienie nowej zmiennej. Oznaczmy zatem:

$$2x^2 + 3x + 3 = t,$$

co daje nam znacznie prostszą postać równania:

$$t = 5\sqrt{t + 6}$$

Zakładając, że $t \geq 0$, możemy podnieść je stronami do kwadratu:

$$t^2 = 25(t + 6)$$

$$t^2 - 25t - 150 = 0$$

$$\Delta = 625 + 600 = 1225 \implies t_1 = \frac{25-35}{2} = -5, \quad t_2 = \frac{25+35}{2} = 30$$

Wartość $t = -5$ odpada, ponieważ nie spełnia warunku $t \geq 0$, zatem wracając do zmiennej x dostajemy do rozwiązania równanie kwadratowe:

$$2x^2 + 3x + 3 = 30$$

$$2x^2 + 3x - 27 = 0$$

$$\Delta = 9 + 216 = 225 \implies x_1 = \frac{-3-15}{4} = -\frac{9}{2}, \quad x_2 = \frac{-3+15}{4} = 3$$

Ostatecznie, równanie ma dwa rozwiązania $x = -\frac{9}{2}$ lub $x = 3$.

Podsumowując, dzięki podstawieniu nowej zmiennej sprowadziliśmy nasze zadanie do rozwiązania dwóch prostych równań kwadratowych, zamiast rozwiązywać skomplikowane równanie stopnia czwartego.

Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

Zadania

1. Rozwiązać równania wykładnicze:

a) $3^{2x} = 9^{4-x}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8^{2x+7}$

c) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

d) $5^x - 5^{3-x} = 20$



e) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$

f) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$

g) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$

2. Przekształcić wyrażenia do najprostszej postaci:

a) $\log_5(5\sqrt{5})$

b) $\log_2 \sqrt[3]{2}^8$

c) $8^{\log_2 5}$

d) $\log_8 27 \cdot \log_9 16$

e) $2^{\log_5 3} - 3^{\log_5 2}$

f) $\log_2(\sqrt{3}+1) + \log_2(\sqrt{6}-2) + \log_2(\sqrt{3}-1) + \log_2(\sqrt{6}+2)$

3. Rozwiązać równania logarytmiczne:

a) $\log_2\left(\frac{1}{2} + x\right) = \log_2 \frac{1}{2} - \log_2 x$

b) $3 \log_8(x+2) = 2 \log_4(2-x)$

c) $\frac{1}{1+\log_5 x} + \frac{5}{3-\log_5 x} = 3$

d) $x^{\log_3 5} = 250 - 5^{\log_3 x}$

e) $x^{\log x} = 100x$

Rozwiązania

1. a) $3^{2x} = 9^{4-x}$

Ponieważ wszystkie działania związane z potęgowaniem są tutaj poprawne dla każdej liczby rzeczywistej x , zatem $D = \mathbb{R}$.

W tym rozdziale będziemy korzystać z elementarnych wzorów wykładniczych:

Jeśli $a, b > 0$ oraz $x, y \in \mathbb{R}$, wtedy prawdziwe są równości:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$



$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Podstawowy mechanizm rozwiązywania najprostszych równań wykładniczych, polega na zapisaniu wyrażeń po obu stronach przy pomocy potęg o jednakowej podstawie:

$$3^{2x} = (3^2)^{4-x}$$

$$3^{2x} = 3^{2 \cdot (4-x)}$$

$$3^{2x} = 3^{8-2x} \iff 2x = 8 - 2x$$

$$4x = 8 \iff x = 2 \in D$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8^{2x+7}$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$(2^{-1})^x = (2^3)^{2x+7}$$

$$2^{-x} = 2^{6x+21} \iff -x = 6x + 21$$

$$-7x = 21 \iff x = -3 \in D$$

$$\text{c) } 7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$7 \cdot 3^x \cdot 3^1 - 5^x \cdot 5^2 = 3^x \cdot 3^4 - 5^x \cdot 5^3$$

$$21 \cdot 3^x - 25 \cdot 5^x = 81 \cdot 3^x - 125 \cdot 5^x$$

$$125 \cdot 5^x - 25 \cdot 5^x = 81 \cdot 3^x - 21 \cdot 3^x$$

$$5^x(125 - 25) = 3^x(81 - 21)$$

$$100 \cdot 5^x = 60 \cdot 3^x$$

$$5 \cdot 5^x = 3 \cdot 3^x$$

$$5^{x+1} = 3^{x+1}$$

$$\frac{5^{x+1}}{3^{x+1}} = 1$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^0$$

$$x + 1 = 0 \iff x = -1 \in D$$

d) $5^x - 5^{3-x} = 20$

$$D = \mathbb{R}$$

$$5^x - \frac{5^3}{5^x} = 20$$

Najskuteczniejszą metodą uproszczenia postaci równania będzie podstawienie nowej zmiennej $t = 5^x$:

$$t - \frac{125}{t} = 20$$

$$t^2 - 125 = 20t$$

$$t^2 - 20t - 125 = 0$$

$$\Delta = 400 + 500 = 900 \implies t_1 = \frac{20-30}{2} = -5, \quad t_2 = \frac{20+30}{2} = 25$$

Pierwszy wariant daje nam sprzeczność $5^x = -5$, natomiast drugi $5^x = 25$ implikuje jedyne rozwiązanie równania $x = 2$.

e) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$

$$D = \mathbb{R}$$

$$(7^2)^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$$

$$(7^x)^2 - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$$

Podstawiamy nową zmienną $t = 7^x$, sprowadzając nasz problem do rozwiązania równania kwadratowego:

$$t^2 - 8t + 7 = 0$$

$$\Delta = 64 - 28 = 36 \implies t_1 = \frac{8-6}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{8+6}{2} = 7$$

Powrót do zmiennej x daje nam ostatecznie dwa rozwiązania:

$$7^x = 1 \quad \vee \quad 7^x = 7$$

$$x = 0 \in D \quad \vee \quad x = 1 \in D$$

f) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$

$$D = \mathbb{R}$$

Przekształcimy najpierw równanie w taki sposób, aby wyrażenia wykładnicze miały możliwie najprostsze podstawy:

$$(2^3)^x + (2 \cdot 3^2)^x = 2 \cdot (3^3)^x$$

$$2^{3x} + 2^x \cdot 3^{2x} = 2 \cdot 3^{3x}$$

Dzielimy teraz równanie stronami przez 3^{3x} :

$$\frac{2^{3x}}{3^{3x}} + \frac{2^x \cdot 3^{2x}}{3^{3x}} = \frac{2 \cdot 3^{3x}}{3^{3x}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + 2^x \cdot 3^{-x} = 2$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$$

Podstawimy nową zmienną $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ co oznacza, że pozostaje nam rozwiązanie równania stopnia trzeciego:

$$t^3 + t - 2 = 0$$

Badając dzielniki wyrazu wolnego ustalamy, że jednym z rozwiązań jest $t = 1$, następnie przeprowadzamy dzielenie:

	1	0	1	-2
1	1	1	2	0

$$t^3 + t - 2 = (t - 1)(t^2 + t + 2)$$

Uzyskaliśmy już najprostszy rozkład, gdyż $\Delta < 0$, zatem jedynym pierwiastkiem wielomianu jest $t = 1$, wracając do zmiennej x dostajemy zatem:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$$x = 0 \in D$$

$$g) \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)^x + \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^x = 4$$

$$D = \mathbb{R}$$

Do rozwiązania powyższego równania przydatne jest dostrzeżenie ciekawej zależności między podstawami potęg:

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})}} = \sqrt{\frac{4 - 3}{2 + \sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

W takim razie, możemy przeprowadzić podstawienie nowej zmiennej:

$$\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^x = t$$

co prowadzi do radykalnego uproszczenia postaci równania:

$$\frac{1}{t} + t = 4$$

$$1 + t^2 = 4t$$

$$t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 = 12 \Rightarrow t_1 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}, \quad t_2 = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^x = 2 - \sqrt{3} \quad \vee \quad \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^x = 2 + \sqrt{3}$$

$$\left((2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \right)^x = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \quad \vee \quad \left((2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \right)^x = 2 + \sqrt{3}$$

$$(2 + \sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = (2 + \sqrt{3})^{-1} \quad \vee \quad (2 + \sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = (2 + \sqrt{3})^1$$

$$\frac{x}{2} = -1 \quad \vee \quad \frac{x}{2} = 1$$

$$x = -2 \in D \quad \vee \quad x = 2 \in D$$

2. Rozpocznijmy od przypomnienia podstawowych wzorów logarytmicznych, które będziemy wykorzystywać w tym oraz następnym zadaniu.

Niech $a, b \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $x, y > 0$, $p \in \mathbb{R}$. Mamy wówczas:

$$\log_a x = p \iff a^p = x$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^p = p \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$a^{\log_a x} = x$$

a) Pierwszy sposób to zamiana logarytmu z iloczynu na sumę logarytmów:

$$\log_5 (5\sqrt{5}) = \log_5 5 + \log_5 \sqrt{5} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Inny sposób wykorzystuje zapis liczby logarytmowanej w postaci jednej potęgi:

$$\log_5 (5\sqrt{5}) = \log_5 (5^1 \cdot 5^{\frac{1}{2}}) = \log_5 5^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_5 5 = \frac{3}{2}$$

b) Skorzystamy ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu:

$$\log_{2\sqrt[3]{2}} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 2\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\log_2 2^{\frac{4}{3}}} = \frac{3}{\frac{4}{3} \log_2 2} = \frac{9}{4}$$

c) Kluczowe jest odpowiednie zapisanie podstawy potęgi:

$$8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = 2^{3 \log_2 5} = 2^{\log_2 5^3} = 5^3 = 125$$

d) Obydwu logarytmom zmienimy podstawę na znacznie wygodniejszą czyli 2:

$$\begin{aligned} \log_8 27 \cdot \log_9 16 &= \frac{\log_2 27}{\log_2 8} \cdot \frac{\log_2 16}{\log_2 9} = \frac{\log_2 3^3}{3} \cdot \frac{4}{\log_2 3^2} \\ &= \frac{3 \log_2 3}{3} \cdot \frac{4}{2 \log_2 3} = 2 \end{aligned}$$

e) $2^{\log_5 3} - 3^{\log_5 2}$

Policzmy najpierw:

$$\begin{aligned} 2^{\log_5 3} &= 2^{\frac{\log_2 3}{\log_2 5}} = 2^{\log_2 3 \cdot \frac{1}{\log_2 5}} = 2^{\log_2 3 \cdot \log_5 2} \\ &= (2^{\log_2 3})^{\log_5 2} = 3^{\log_5 2} \end{aligned}$$

Oznacza to, że odjemna i odjemnik są sobie równe, wobec tego:

$$2^{\log_5 3} - 3^{\log_5 2} = 0$$

f) $\log_2(\sqrt{3} + 1) + \log_2(\sqrt{6} - 2) + \log_2(\sqrt{3} - 1) + \log_2(\sqrt{6} + 2)$

Zmienimy kolejność składników i zamienimy sumy logarytmów na logarytm iloczynu:

$$\begin{aligned}
 & \log_2(\sqrt{3} + 1) + \log_2(\sqrt{6} - 2) + \log_2(\sqrt{3} - 1) + \log_2(\sqrt{6} + 2) \\
 &= \log_2(\sqrt{3} + 1) + \log_2(\sqrt{3} - 1) + \log_2(\sqrt{6} - 2) + \log_2(\sqrt{6} + 2) \\
 &= \log_2((\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)) + \log_2((\sqrt{6} - 2)(\sqrt{6} + 2)) \\
 &= \log_2(3 - 1) - \log_2(6 - 4) \\
 &= \log_2 2 + \log_2 2 = 1 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

3. a) $\log_2\left(\frac{1}{2} + x\right) = \log_2 \frac{1}{2} - \log_2 x$

Logarytmować można tylko wyrażenia dodatnie, zatem:

$$D: \frac{1}{2} + x > 0 \quad \wedge \quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad D = (0, +\infty)$$

Sumę logarytmów zamieniamy na logarytm z iloczynu:

$$\log_2 x + \log_2\left(\frac{1}{2} + x\right) = \log_2 \frac{1}{2}$$

$$\log_2\left(x \cdot \left(\frac{1}{2} + x\right)\right) = \log_2 \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x + x^2 = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1 \notin D, \quad x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \in D$$

$$b) 3 \log_8(x+2) = 2 \log_4(2-x)$$

$$D: x+2 > 0 \quad \wedge \quad 2-x > 0 \quad \Rightarrow \quad D = (-2, 2)$$

Ponieważ występujące w równaniu logarytmy mają różne podstawy, zatem dokonamy ich zamiany, najlepiej wybrać liczbę 2 jako jednakową podstawę:

$$3 \cdot \frac{\log_2(x+2)}{\log_2 8} = 2 \cdot \frac{\log_2(2-x)}{\log_2 4}$$

$$3 \cdot \frac{\log_2(x+2)}{3} = 2 \cdot \frac{\log_2(2-x)}{2}$$

$$\log_2(x+2) = \log_2(2-x)$$

$$x+2 = 2-x \quad \Rightarrow \quad x = 0 \in D$$

$$c) \frac{1}{1+\log_5 x} + \frac{5}{3-\log_5 x} = 3$$

$$D: x > 0 \quad \wedge \quad 1+\log_5 x \neq 0 \quad \wedge \quad 3-\log_5 x \neq 0$$

$$\log_5 x \neq -1 \quad \wedge \quad \log_5 x \neq 3$$

$$\log_5 x \neq \log_5 \frac{1}{5} \quad \wedge \quad \log_5 x \neq \log_5 125$$

$$x \neq \frac{1}{5} \quad \wedge \quad x \neq 125$$

$$D = \left(0, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, 125\right) \cup (125, +\infty)$$

Możemy teraz przeprowadzić podstawienie nowej zmiennej:

$$t = \log_5 x,$$

co prowadzi do postaci równania wymiernego:

$$\frac{1}{1+t} + \frac{5}{3-t} = 3$$

$$3-t+5(1+t) = 3(1+t)(3-t)$$

$$3-t+5+5t = 3(3-t+3t-t^2)$$

$$4t+8 = 9+6t-3t^2$$

$$3t^2-2t-1 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16 \implies t_1 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}, \quad t_2 = \frac{2+4}{6} = 1$$

Wracamy teraz do zmiennej x :

$$\log_5 x = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad \log_5 x = 1$$

Ostatecznie mamy dwa rozwiązania:

$$x = 5^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \in D \quad \vee \quad x = 5^1 = 5 \in D$$

d) $x^{\log_3 5} = 250 - 5^{\log_3 x}$

$$D = (0, +\infty)$$

Aby uprościć postać równania, w wyrażeniu po lewej stronie zmienimy podstawę logarytmu na x . Jest to możliwe, ponieważ jak łatwo sprawdzić, liczba 1 nie jest rozwiązaniem równania.

$$x^{\log_3 5} = x^{\frac{\log_x 5}{\log_x 3}} = x^{\left(\log_x 5 \cdot \frac{1}{\log_x 3}\right)} = \left(x^{\log_x 5}\right)^{\frac{1}{\log_x 3}} = 5^{\log_3 x}$$

$$5^{\log_3 x} = 250 - 5^{\log_3 x}$$

$$2 \cdot 5^{\log_3 x} = 250$$

$$5^{\log_3 x} = 125$$

$$5^{\log_3 x} = 5^3$$

$$\log_3 x = 3$$

$$x = 27 \in D$$

$$e) x^{\log x} = 100x$$

$$D = (0, +\infty)$$

Najprostszym sposobem rozwiązania jest zlogarytmowanie równania stronami, oczywiście przy pomocy logarytmu o podstawie 10. Jest to operacja poprawna, ponieważ w całej dziedzinie wyrażenia po obu stronach są dodatnie.

$$\log(x^{\log x}) = \log(100x)$$

$$\log x \cdot \log x = \log 100 + \log x$$

$$(\log x)^2 = 2 + \log x$$

Podstawienie nowej zmiennej $t = \log x$ prowadzi do postaci równania kwadratowego:

$$t^2 = 2 + t$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 \implies t_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \quad t_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$



Powrót do zmiennej x daje zatem:

$$\log x = -1 \quad \vee \quad \log x = 2$$

$$x = \frac{1}{10} \in D \quad \vee \quad x = 100 \in D$$

$$2025 = 45^2$$

$$(20 + 25)^2 = 2025$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2 = 2025$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = 2025$$

