

MATERIAŁY DYDAKTYCZNE

do zajęć wyrównawczych z przedmiotu:

FIZYKA

dla studentów kierunku

TRANSPORT

Opracował:
Adam Prószyński

Lublin 2025 r.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.
Utwór dostępny jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe.

RACHUNEK WEKTOROWY

Zad.1 Znaleźć kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$ korzystając z definicji iloczynu skalarnego:

Nasze wektory w układzie kartezjańskim mają następujące składowe:

$$\vec{a} = 9\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}$$

Definicja iloczynu skalarnego jest następująca:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$$

Wyliczmy z niej $\cos$ kąta:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Jak widać potrzebować będziemy długości obydwu wektorów. Obliczamy je z następującej zależności:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$|\vec{b}| = b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

Co daje nam:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Po podstawieniu danych:

$$\cos \alpha = \frac{(9\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \cdot (\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k})}{\sqrt{81 + 4 + 1} \sqrt{1 + 16 + 49}} = \frac{9 + 8 - 7}{\sqrt{81 + 4 + 1} \sqrt{1 + 16 + 49}} = \frac{10}{97,17} = 0,13$$

Zad.2 Obliczyć iloczyny skalarne i wektorowe następujących wektorów:

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{a} = [1, 2, 3]$$

$$\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\Leftrightarrow \vec{b} = [2, 3, 4]$$

$$\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{c} = [1, -3, 4]$$

$$\vec{a} \circ \vec{b}, \vec{b} \circ \vec{c}, \vec{a} \circ \vec{c}$$

$$\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{a} \times \vec{c}$$

Korzystając z iloczynu skalarnego, pamiętając, że iloczyn mieszany wersorów jest

równy 0, a tych samych 1 otrzymujemy:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \circ (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \circ (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) = 2 + 6 + 12 = 20$$

$$\vec{b} \circ \vec{c} = (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) \circ (\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}) = 2 - 9 + 16 = 9$$

$$\vec{a} \circ \vec{c} = (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \circ (\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}) = 1 - 6 + 12 = 7$$

Aby policzyć iloczyn wektorowy wektorów skorzystamy z metody wyznacznikowej:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} + a_x b_y \vec{k} - a_y b_x \vec{k} - a_z b_y \vec{i} - a_x b_z \vec{j}$$

Po podstawieniu składowych wektorów otrzymamy:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k} - 4\vec{k} - 9\vec{i} - 4\vec{j} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 6\vec{k} + 4\vec{j} - 3\vec{k} - 12\vec{i} - 8\vec{j} = 0\vec{i} - 8\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} - 2\vec{k} - 9\vec{i} - 4\vec{j} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

Zad.3 Obliczyć iloczyn skalarny sumy i różnicy dwóch wektorów:

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

Najpierw musimy obliczyć sumę i różnicę dwóch wektorów. Obliczymy je odpowiednio dodając i odejmując składowe wektorów $\vec{a}$ oraz $\vec{b}$

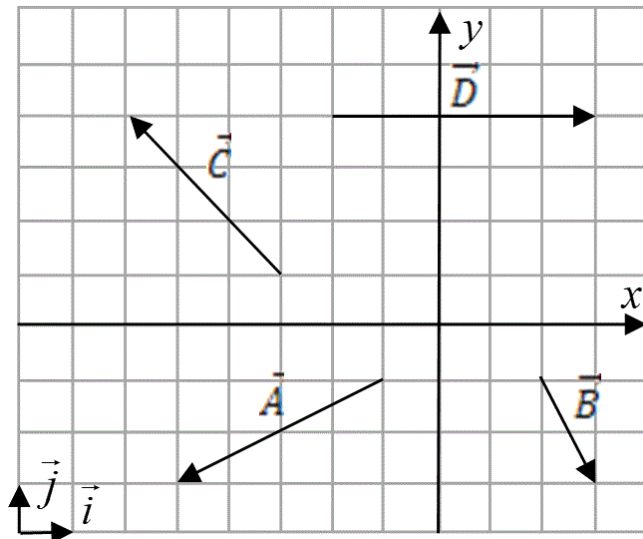
$$(\vec{a} + \vec{b}) = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$$

Czyli ostatecznie otrzymamy:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) = (5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) \circ (-\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}) = -5 + 8 + 21 = 24$$

Zad.4 Znaleźć współrzędne poniższych wektorów ($\vec{i}$ i $\vec{j}$ oznaczają wektory jednostkowe wzdłuż kierunków x i y):



Współrzędne wektora znajdujemy odejmując składową końcową od początkowej każdej ze współrzędnych:

$$[x_k - x_p, y_k - y_p]$$

Czyli:

$$\vec{A} = [-5 - (-1), -3 - (-1)] = [-4, -2] = -4\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{B} = [3 - 2, -3 - (-1)] = [1, -2] = 1\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{C} = [-6 - (-3), 4 - 1] = [-3, 3] = -3\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\vec{D} = [3 - (-2), 4 - 4] = [5, 0] = 5\vec{i} + 0\vec{j}$$

KINEMATYKA

Zad.5 Pojazd na trasie od punktu A do B porusza się następującymi ruchami:

- ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem 2 m/s^2 przez pierwszych 10 sekund ruchu
- ruchem jednostajnym przez kolejne 30 sekund,
- ruchem jednostajnie opóźnionym z opóźnieniem 5 m/s^2 aż do zatrzymania.

Obliczyć:

- a) Prędkość maksymalną pojazdu.
- b) Czas ruchu jednostajnie opóźnionego.
- c) Całkowitą drogę przebytą przez pojazd.
- d) Prędkość średnią pojazdu od punktu A do B.

a) Przyspieszenie pojazdu można zapisać jako:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_k - v_p}{\Delta t}$$

Stąd wyliczymy prędkość końcową przy założeniu że prędkość początkowa była zerowa momencie rozpoczęcia ruchu.

$$a\Delta t = v_k - v_p$$

$$a\Delta t + v_p = v_k$$

Po podstawieniu danych prędkość końcowa wyniesie:

$$v_k = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 10 \text{s} + 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Z opóźnienia wyliczamy czas w ruchu opóźnionym:

$$a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_k - v_p}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{v_k - v_p}{a_2}$$

$$\Delta t = \frac{20 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 4 \text{s}$$

c) Całkowitą drogę od punktu A do B policzymy sumując drogi w poszczególnych fragmentach ruchu: przyspieszonym, jednostajnym i opóźnionym.

$$s = s_p + s_j + s_o$$

$$s = \left(v_p t + \frac{at^2}{2} \right) + v_k t_j + \left(v_k \Delta t + \frac{a_2 \Delta t^2}{2} \right)$$

Po wstawieniu danych liczbowych:

$$s = \left(0 \frac{m}{s} 10s + \frac{2 \frac{m}{s^2} (10s)^2}{2} \right) + 20 \frac{m}{s} 30s + \left(20 \frac{m}{s} 4s + \frac{5 \frac{m}{s^2} (10s)^2}{2} \right) = 100m + 600m + 330m = 1030m$$

Całkowity czas przebyty natomiast będzie równy sumie czasów w poszczególnych typach ruchów:

$$t_c = t_p + t_j + t_o = 10s + 30s + 4s$$

d) Na koniec wyliczamy prędkość średnią pojazdu dzieląc całkowitą drogę przez całkowity czas:

$$v_{sr} = \frac{s}{t_c}$$

Zad.6 Z punktu A i B jednocześnie wyruszają ku sobie dwaj motocykliści. Motocyklista z punktu A porusza się stałą prędkością 100 km/h, a motocyklista z punktu B z prędkością 150 km/h. Obliczyć po jakim czasie i w jakiej odległości od punktu A motocykliści się spotkają. Odległość między punktami A i B wynosi 500km.

Droga jaką przebędzie motocyklista z punktu A:

$$x_1(t) = v_1 t$$

Droga jaką przebędzie motocyklista z punktu B:

$$x_2(t) = x_o - v_2 t$$

Czas po jakim się spotkają wyliczymy porównując drogi jakie przebyli:

$$x_1(t) = x_2(t)$$

$$v_1 t = x_o - v_2 t$$

$$v_1 t + v_2 t = x_o$$

$$t(v_1 + v_2) = x_o$$

$$t = \frac{x_o}{(v_1 + v_2)}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$t = \frac{500 \text{ km}}{(100 \text{ km} / h + 150 \text{ km} / h)} = \frac{500}{250} h = 2h$$

Aby policzyć w jakiej odległości od punktu A spotkają się obaj motocykliści podstawiamy wyliczony czas do pierwszego równania.

$$x_1(t) = v_1 \frac{x_o}{(v_1 + v_2)}$$

$$x_1(t) = 100 \text{ km} / h \cdot 2h = 200 \text{ km}$$

Zad.7 Samochód osobowy i ciężarowy wyruszają jednocześnie z tego samego miejsca. Osobowy z przyspieszeniem $1,5 \text{ m/s}^2$, a ciężarowy z przyspieszeniem $0,7 \text{ m/s}^2$. Jaka będzie różnica prędkości po upływie 12 s i jaka będzie pomiędzy nimi odległość?

Samochody poruszają się ruchem jednostajnie przyspieszonym.

Droga jaką przebędzie samochód osobowy wyniesie:

$$x_1(t) = \frac{a_1 t^2}{2}$$

Natomiast droga jaką przebędzie samochód ciężarowy wyniesie:

$$x_2(t) = \frac{a_2 t^2}{2}$$

Odpowiednio prędkości dla samochodu osobowego i ciężarowego:

$$v_1(t) = a_1 t$$

$$v_2(t) = a_2 t$$

Różnica prędkości po upływie 12 sekund wyniesie zatem:

$$\Delta v = v_1(t) - v_2(t) = a_1 t - a_2 t = (a_1 - a_2) t$$

Natomiast odległość pomiędzy samochodami:

$$\Delta x = x_1(t) - x_2(t) = \frac{a_1 t^2}{2} - \frac{a_2 t^2}{2} = \frac{t^2}{2} (a_1 - a_2)$$

Po podstawieniu danych:

$$\Delta x = \frac{(12 \text{ s})^2}{2} \left(1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 57,6 \text{ m}$$

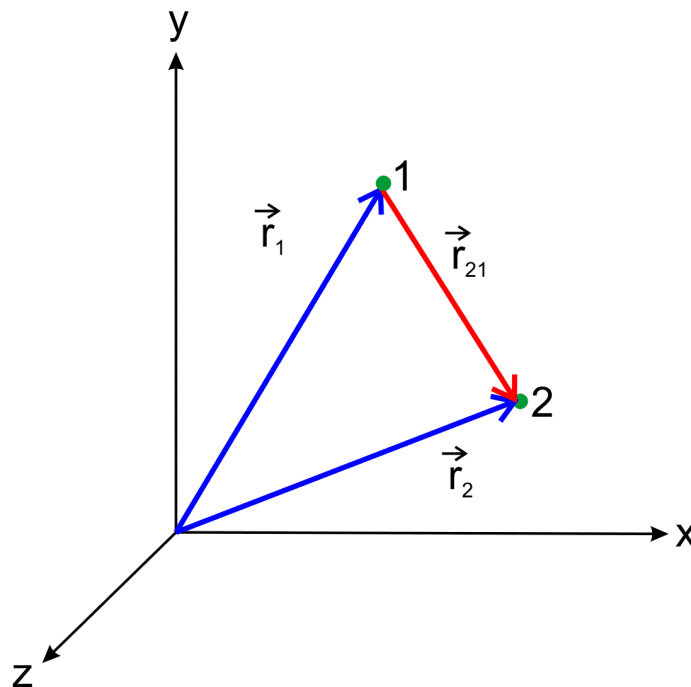
Zad.8 Równanie dwóch punktów obserwowanych z układu współrzędnych kartezjańskich przedstawiają równania:

$$\vec{r}_1 = (3t + t^2)\vec{i} + (2t + t + t^2)\vec{j} + 2t\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{i} + 2t\vec{j} + (1+t)\vec{k}$$

Znaleźć:

- prędkość punktu drugiego względem pierwszego,
- przyspieszenie punktu drugiego względem pierwszego.



Wektor położenia punktu 2 względem 1 jest równy:

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Wstawmy nasze wektory:

$$\vec{r}_{21} = \vec{i} + 2t\vec{j} + (1+t)\vec{k} - (3t + t^2)\vec{i} + (2t + t + t^2)\vec{j} + 2t\vec{k}$$

Po odjęciu składowych otrzymamy:

$$\vec{r}_{21} = (1 - 3t + t^2)\vec{i} + (-2 + t + t^2)\vec{j} + (1 - t)\vec{k}$$

Wektor prędkości punktu 2 względem 1 wyznaczmy licząc pochodną wektora położenia po czasie:

$$\vec{v}_{21} = \frac{d\vec{r}_{21}}{dt}$$

$$\vec{v}_{21} = (3t - 2t)\vec{i} + (1 - 2t)\vec{j} - \vec{k}$$

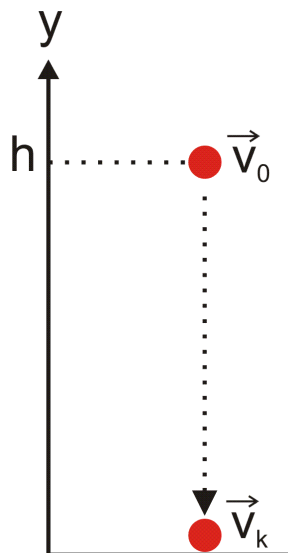
Wektor przyspieszenia punktu 2 względem 1 wyznaczymy licząc pochodną wektora prędkości po czasie:

$$\vec{a}_{21} = \frac{d\vec{v}_{21}}{dt}$$

$$\vec{a}_{21} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$$

Zad.9 Z wysokości h puszcza się swobodnie kamień. Obliczyć:

- Po jakim czasie kamień spadnie na ziemię?
- Jaka będzie końcowa prędkość tego kamienia?



Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Warunki początkowe:

$$v_0 = 0$$

$$a = -g$$

$$y_0 = h$$

Ruch jakim porusza się kamień będzie ruchem przyspieszonym, co w kierunku osi y zapiszemy jako:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Korzystając z warunków początkowych:

$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$

a). Kamień osiągnie ziemię kiedy y się wyzeruje

$$y(t^*) = 0$$

$$0 = h - \frac{gt^{*2}}{2} \rightarrow gt^{*2} = 2h \rightarrow |t^{*2}| = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Czyli czas po jakim ciało osiągnie ziemię wyniesie:

$$t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}} \vee t^* = -\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Słuszna jest wartość dodatnia czasu.

b). Prędkość końcową wyznaczmy licząc pochodną drogi po czasie.

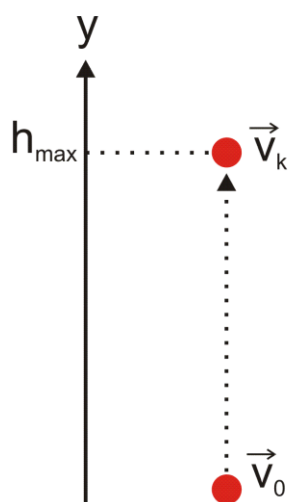
$$v_k = v(t^*) = \frac{dy}{dt} = -gt^*$$

Po podstawieniu uprzednio wyznaczonego czasu uzyskujemy:

$$v_k = v(t^*) = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2hg}$$

Zad. 10 Z poziomu ziemi wyrzucono ku górze piłkę Obliczyć:

- Czas wznoszenia
- Maksymalną wysokość na jaką wzniesie się piłka



Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Warunki początkowe:

$$v_0 \neq 0$$

$$a = -g$$

$$y_0 = 0$$

Ruch jakim porusza się kamień będzie ruchem przyspieszonym, co w kierunku osi y zapiszemy jako:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Korzystając z warunków początkowych:

$$y(t) = 0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

a). Czas wznoszenia obliczymy z prędkości ciała:

$$v(t) = v_0 - gt$$

Musi się ona wyzerować

$$v(t^*) = 0$$

$$0 = v_0 - gt^*$$

$$t^* = \frac{v_0}{g}$$

b). Maksymalną wysokość na jaką wzniesie się ciało obliczymy podstawiając za drogę w osi y obliczony czas wznoszenia.

$$h_{\max} = y(t^*) = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g \left(\frac{v_0}{g} \right)^2}{2}$$

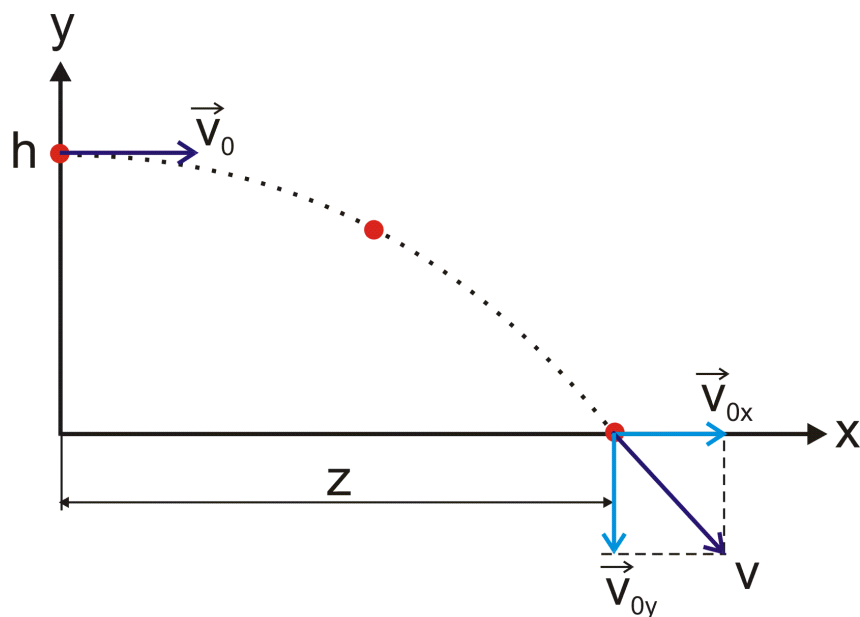
$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g}$$

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Zad. 11 Na wysokości h leci samolot który wyrzuca bombę z prędkością v_0 . Znaleźć:

- Czas po jakim bomba spadnie na ziemię
- W jakiej będzie to odległości od miejsca jej wyrzutu
- Równanie toru bomb

Przyspieszenie ziemskie wynosi g .



Opisana sytuacja jest niczym innym jak rzutem poziomym składającym się z dwóch ruchów: jednostajnego w przód oraz swobodnego spadku z przyspieszeniem ziemskim g . Możemy to zapisać przy pomocy poniższych równań:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

Dla naszego przypadku równania te będą miały postać:

$$x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$

a). Bomba osiągnie ziemię kiedy y się wyzeruje czyli analogicznie jak ma to miejsce w spadku swobodnym:

$$y(t^*) = 0$$

$$0 = h - \frac{gt^{*2}}{2} \rightarrow gt^{*2} = 2h \rightarrow |t^{*2}| = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Czyli czas po jakim ciało osiągnie ziemię wyniesie:

$$t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}} \vee t^* = -\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Rozwiązaniem będzie wartość dodatnia czasu.

b). Odległość upadku bomby od miejsca jej wyrzutu będzie zasięgiem w tym rzucie. Obliczymy ją podstawiając wyznaczony powyżej czas do równania w osi x:

$$z = x(t^*) = v_0 t^*$$

$$z = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Równania opisujące ruch wzdłuż poszczególnych osi układu współrzędnych są równaniami parametrycznymi. Tym parametrem jest czas. W celu znalezienia równania toru należy odparametryzować te równania przekształcając je z postaci:

$$x = f(t)$$

$$y = f(t)$$

do postaci niezależnej od czasu:

$$y = f(x)$$

Wyliczmy więc czas z jednego z równań:

$$x(t) = v_0 t \rightarrow t = \frac{x}{v_0}$$

i podstawmy go do drugiego równania:

$$y(x) = h - \frac{g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2}{2}$$

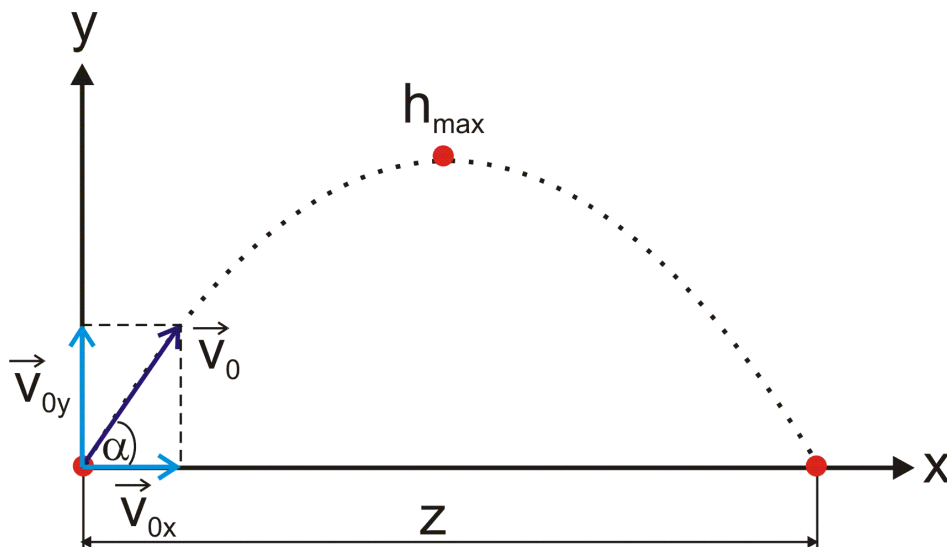
Otrzymamy wówczas równanie toru bomby:

$$y(x) = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

Zad. 12 Z poziomu ziemi pod kątem α do poziomu został wyrzuty z armaty pocisk z prędkością v_0 . Znaleźć:

- Czas po jakim pocisk spadnie na ziemię
- Maksymalną wysokość na jaką wzniesie się pocisk
- Odległość upadku pocisku od miejsca wyrzutu
- Równanie toru pocisku

Przyspieszenie ziemskie wynosi g .



Opisana sytuacja składają się z dwóch ruchów: jednostajnego w przód oraz jednostajnie przyspieszonego z przyspieszeniem ziemskim g . Ponieważ prędkość wyrzutu pocisku jest skierowana pod kątem, należy ją rozłożyć na składowe wzdłuż poszczególnych osi. Równania opisujące ruch wzdłuż poszczególnych osi będą następujące:

$$x(t) = v_{0x} t$$

$$y(t) = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2}$$

Potrzebujemy więc prędkości wzdłuż osi x i y . obliczymy ją z trójkąta prostokątnego jaki uzyskamy po rozkładzie prędkości v_0 na składowe z odpowiednich funkcji trygonometrycznych:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha$$

Po podstawieniu powyższego do równań ruchu dla poszczególnych osi otrzymamy:

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha$$

$$y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Bomba spadnie na ziemię kiedy y się wyzeruje

$$y(t^*) = 0$$

$$v_0 t^* \sin \alpha - \frac{gt^{*2}}{2} = 0$$

Wyłączmy t^* przed nawias

$$t^* \left(v_0 \sin \alpha - \frac{gt^*}{2} \right) = 0$$

Otrzymamy dwa rozwiązania:

$$t^* = 0 \vee t^* = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Pierwsze jest czasem dla momentu wystrzelenia pocisku drugi czas jest czasem po jakim pocisk spadnie na ziemię.

b). Czas t' , po którym pocisk osiągnie maksymalną wysokość na jaką wzniesie się pocisk wyznaczmy z warunku zerowania się prędkości w kierunku pionowym.

$$\vec{v}_y(t') = 0$$

Wektor położenia pocisku w dowolnej chwili czasu zapiszemy jako:

$$\vec{r}(t) = v_0 t \cos \alpha \vec{i} + \left(v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \right) \vec{j}$$

Stąd wektor prędkości wyniesie:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_0 \cos \alpha \vec{i} + (v_0 \sin \alpha - gt) \vec{j}$$

Zatem składowa y wektora prędkości jest równa:

$$v_y = v_0 t' \sin \alpha - gt'$$

Po przyrównaniu do zera:

$$v_0 t' \sin \alpha - gt' = 0$$

Czyli czas po którym pocisk osiągnie maksymalną wysokość wyniesie:

$$t' = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Czyli maksymalna wysokość będzie równa:

$$h_{\max} = y(t') = v_0 \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - g \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - g \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g^2}$$

Ostatecznie:

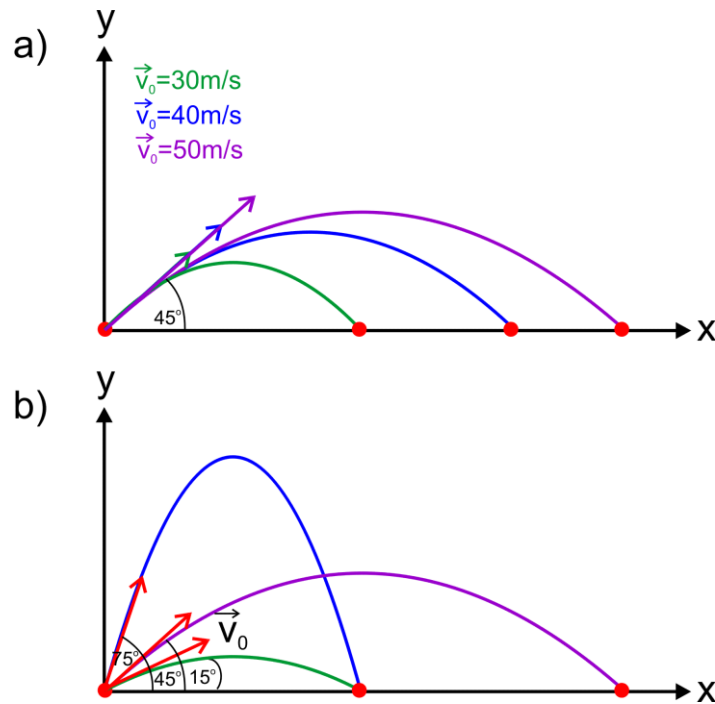
$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

c). Odległość upadku pocisku czyli jego zasięg obliczymy podstawiając czas przelotu pocisku od wystrzału do momentu upadku t^* .

$$z = x(t^*) = v_0 t^* \cos \alpha = v_0 \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \cos \alpha = \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g} \cos \alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Jak widać z powyższego równania i z rysunku poniżej, zasięg zależy zarówno od prędkości wystrzału jak i kąta pod jakim wystrzelono pocisk.



Zależność zasięgu od prędkości wyrzutu a) i kąta wyrzutu b).

Obliczmy jak zmieni się zasięg wraz ze zmianą kąta wyrzelenia pocisku.

$$z(\alpha) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Musimy w tym celu policzyć pochodną z względem kąta α .

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{2v_0^2 \cos 2\alpha}{g}$$

Funkcja $z(\alpha)$ osiąga maksimum jeżeli jej pochodna się zeruje. Zatem:

$$\frac{2v_0^2 \cos 2\alpha}{g} = 0$$

Czyli:

$$\cos 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Nasz kąt wyrzutu przy którym zasięg pocisku będzie maksymalny wyniesie zatem:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

d). Równania opisujące ruch wzdłuż poszczególnych osi układu współrzędnych są równaniami parametrycznymi. Tym parametrem jest czas. W celu znalezienia równania toru należy odparametryzować te równania przekształcając je z postaci:

$$x = f(t)$$

$$y = f(t)$$

do postaci niezależnej od czasu:

$$y = f(x)$$

Wyliczmy więc czas z jednego z równań:

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha \rightarrow t = \frac{v_0}{\cos \alpha}$$

I podstawimy do drugiego:

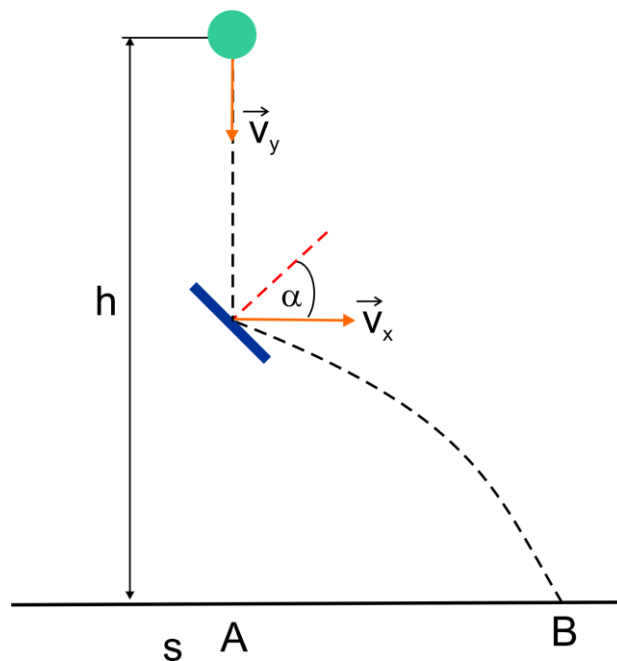
$$y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$y(x) = v_0 \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2}{2}$$

Po uproszczeniu zapisu dostajemy równanie toru pocisku (tzw. krzywa balistyczna):

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{x^2}{2g v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Zad.13 Z wysokości h spada kula i uderza w płaską przeszkodę nachyloną pod kątem 45 stopni. Punkt zderzenia znajduje się w połowie wysokości z jakiej rzucono kulę. W jakiej odległości od punktu A upadnie kula jeżeli zderzenie będzie idealnie sprężyste?



Ruch jakim porusza się kamień będzie spadkiem swobodnym z przyspieszeniem g (czyli ruchem przyspieszonym), co w kierunku osi y zapiszemy jako:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Korzystając z warunków początkowych:

$$v_0 = 0$$

$$a = -g$$

$$y_0 = \frac{h}{2}$$

Otrzymamy:

$$y(t) = \frac{h}{2} - \frac{gt^2}{2}$$

Aby wyliczyć czas lotu do przeszkody musimy za $y(t)$ podstawić 0:

$$0 = \frac{h}{2} - \frac{gt^2}{2} \rightarrow gt^2 = h \rightarrow |t^2| = \sqrt{\frac{h}{g}}$$

Czyli czas po jakim ciało dotrze do przeszkody wyniesie:

$$t = \sqrt{\frac{h}{g}} \vee t = -\sqrt{\frac{h}{g}}$$

Słuszne jest rozwiązanie dodatnie. Prędkość z jaką kula uderzy w przeszkodę

wyliczymy z przyspieszenia w tym ruchu wstawiając za t nasz wyliczony czas oraz przyspieszenie g za a :

$$a = \frac{v_y}{t}$$

$$v_y = at = g \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{g^2 \frac{h}{g}} = \sqrt{gh}$$

W zadaniu założono, że zderzenie kuli z przeszkodą jest idealnie sprężyste zatem prędkość po zderzeniu zgodnie z zasadą zachowania pędu jest taka sama jak przed zderzeniem:

$$mv_y = mv_x$$

$$v_y = v_x$$

Od momentu odbicia nasz ruch kuli będzie rzutem poziomym z wysokości $h/2$.

Równania ruchu w obu osiach będą następujące:

$$x(t) = v_x t$$

$$y(t) = \frac{h}{2} - \frac{gt^2}{2}$$

Kula osiągnie punkt B gdy $y(t)=0$ czyli podobnie jak w pierwszej części zadania będzie to po czasie:

$$t = \sqrt{\frac{h}{g}}$$

Podstawiając ten czas do równania w osi x otrzymamy odległość AB:

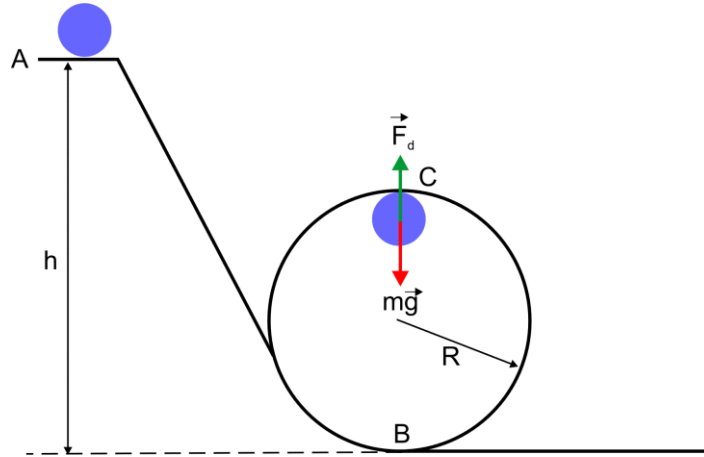
$$x(t) = \sqrt{gh} \sqrt{\frac{h}{g}}$$

Czyli ostatecznie nasza odległość AB wyniesie:

$$x(t) = \sqrt{h^2} = h$$

DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO

Zad.14 Z jakiej wysokości należy puścić kulę, aby pokonała ona pętlę o promieniu 50 cm?



Mamy tu przykład zastosowania zasady zachowania energii. Energia potencjalna wózka w punkcie A jest równa sumie jego energii kinetycznej (do punktu B) i energii potencjalnej jaką kula musi mieć w punkcie C czyli na wysokości pętli, która jest podwójnym jej promieniem:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + mg2R$$

Jak widać masy możemy skrócić:

$$gh = \frac{v^2}{2} + g2R$$

Aby kula pokonała pętlę w punkcie C musi istnieć równowaga sił ciężkości i siły dośrodkowej. Inaczej kula odpadnie.

$$mg = \frac{mv^2}{R}$$

Tutaj również możemy pozbyć się masy:

$$g = \frac{v^2}{R}$$

Podstawmy zatem g do wzoru na zasadę zachowania energii:

$$\frac{v^2}{R}h = \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{R}2R$$

$$\frac{v^2}{R}h = \frac{v^2}{2} + 2v^2$$

$$\frac{1}{R}h = \frac{1}{2} + 2$$

Ostatecznie:

$$h = \frac{5}{2}R$$

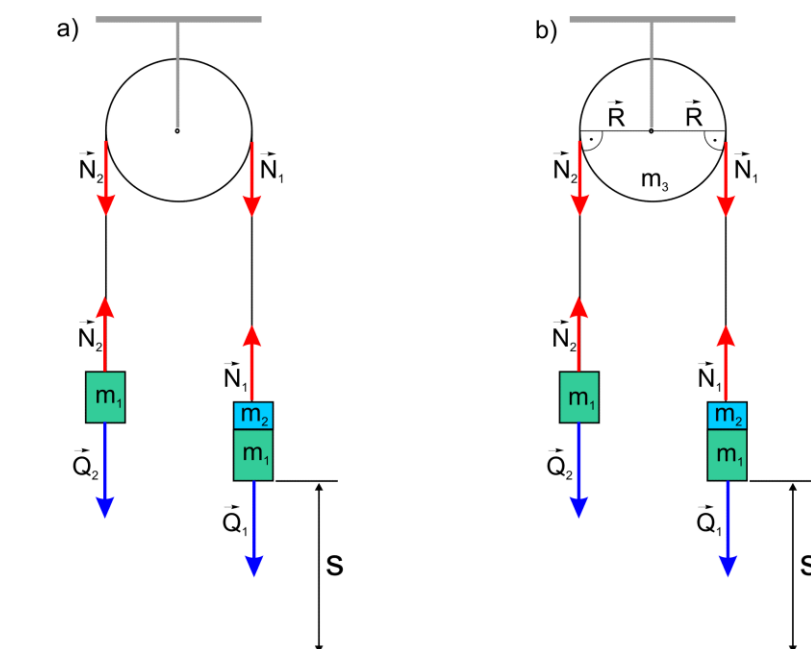
Po podstawieniu danych wysokość będzie równa:

$$h = \frac{5}{2}0,5m = \frac{2,5}{2}m = 1,25m$$

Zad.15 Dwa ciężarki o jednakowych masach m_1 zawieszono na linie przerzuconej przez nieruchomy nieważki błocek. Na jednym z ciężarków położono pierścień o masie m_2 (Rys a). Oblicz:

- przyspieszenie z jakim poruszają się ciała,
- siłę napięcia linki,
- drogę jaką pokonają ciężarki w czasie t .

Tarcie linki o błocek, masę błočka i linki pomijamy, przyspieszenie ziemskie wynosi g .



Na Rys a) $\vec{N}$ i $\vec{Q}$ z odpowiednimi indeksami oznaczają odpowiednio siły naciągu liny i ciężar ciężarków. U nas: $\vec{N}_1 = \vec{N}_2 = N$

a) Rozpoczynamy od napisania, zgodnie z dynamicznym równaniem ruchu wynikającym z II zasady dynamiki Newtona, równań na wypadkowe siły działające na ciężarki przyjmując kierunek dodatni dla ciężarków z prawej strony rysunku w dół, a dla ciężarków z lewej strony rysunku w górę.

II zasady dynamiki Newtona będzie miała postać:

$$am = F_w$$

gdzie F_w to wypadkowa siła działająca na dany ciężarek.

Równania te w zapisie wektorowym będą miały postać:

$$(m_1 + m_2)\vec{a} = \vec{Q}_1 + \vec{N}$$

$$m_1\vec{a} = \vec{N} + \vec{Q}_2$$

Do wyliczenia przyspieszenia potrzebujemy zapisu skalarowego. Czyli:

$$(m_1 + m_2)a = Q_1 - N$$

$$m_1a = N - Q_2$$

Dodajmy równania stronami:

$$(m_1 + m_2)a + m_1a = Q_1 - N + N - Q_2$$

Jak widać naciągi się skrócą

$$m_2a + 2m_1a = Q_1 - Q_2$$

Wyliczmy przyspieszenie układu ciężarków:

$$a(2m_1 + m_2) = Q_1 - Q_2$$

$$a = \frac{Q_1 - Q_2}{2m_1 + m_2}$$

Ciężary Q_1 i Q_2 są równe:

$$Q_1 = (m_1 + m_2)g$$

$$Q_2 = m_1g$$

Po wstawieniu do równania na przyspieszenie otrzymujemy:

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g - m_1g}{2m_1 + m_2}$$

Po odjęciu:

$$a = \frac{m_2 g}{2m_1 + m_2}$$

b) Siłę napięcia linki wyliczymy podstawiając obliczone przyspieszenie do np. równania $m_1 a = N - Q_2$.

$$m_1 \frac{m_2 g}{2m_1 + m_2} = N - m_1 g$$

$$N = m_1 \frac{m_2 g}{2m_1 + m_2} + m_1 g$$

$$N = m_1 g \left(\frac{m_2}{2m_1 + m_2} + 1 \right)$$

c) Układ porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z wyznaczonym przyspieszeniem a . Droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym wyraża się wzorem:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

W naszym przypadku położenie początkowe czyli punkt, w którym rozpoczyna się ruch s_0 , można przyjąć za $= 0$. Podobnie nie znamy prędkości początkowej v_0 . Również i ją przyjmujemy za $= 0$. Nasz wzór zatem przyjmie postać:

$$s = \frac{at^2}{2}$$

Podstawiając obliczone wcześniej przyspieszenie otrzymujemy:

$$s = \frac{\frac{m_2 g}{2m_1 + m_2} t^2}{2} = \frac{m_2 g}{2(2m_1 + m_2)} t^2$$

Ostatecznie:

$$s = \frac{m_2 g}{4m_1 + 2m_2} t^2$$

Zastanówmy się teraz co by było gdyby nasz bloczek się obracał i nie był nieważki czyli posiadałby masę np. m_3 (Rys b). Czy obliczone przez nas wielkości były by takie same?

Podobnie jak w poprzednio rozpoczynamy od napisania, zgodnie z dynamicznym równaniem ruchu wynikającym z II zasady dynamiki Newtona, równań na wypadkowe siły działające na ciężarki. Równania te w zapisie wektorowym będą miały identyczną postać. Zapiszmy je już tylko skalarnie:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)a &= Q_1 - N_1 \\ m_1a &= N_2 - Q_2\end{aligned}$$

Należy zwrócić uwagę, że naciągi po obydwu stronach bloczka nie są już sobie równe ponieważ bloczek ma masę i się obraca tzn. nie traktujemy go jako nieważki.

W omawianej sytuacji bloczek porusza się ruchem obrotowym z przyspieszeniem ε . Będą na niego zatem działały dwa momenty sił po obydwu jego stronach związane z siłami naciągu nitki. Zauważmy, że nie są one teraz jednakowe po obydwu stronach bloczka. Moment siły z definicji jest równy iloczynowi wektorowemu ramienia i siły:

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$$

Wartość momentu siły wyliczymy ze wzoru:

$$M = R \cdot F \cdot \sin \angle(\vec{R}, \vec{F})$$

gdzie siłą F są u nas siły naciągu N_1 i N_2 , a ramieniem promień walca R .

Zatem na nasz bloczek działają dwa momenty sił po obydwu jego stronach:

$$M_1 = R \cdot N_1 \cdot \sin 90^\circ$$

oraz:

$$M_2 = R \cdot N_2 \cdot \sin 90^\circ$$

Co daje nam:

$$M_1 = R \cdot N_1$$

$$M_2 = R \cdot N_2$$

Dla bloczka ponieważ jest w ruchu obrotowym musimy zastosować II zasadę dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego:

$$I\varepsilon = M_w$$

Gdzie I to moment bezwładności walca ($I = \frac{1}{2} m_3 R^2$), ε -przyspieszenie kątowe, zaś

M_w to wypadkowy moment sił działający na bloczek.

Zatem:

$$I\varepsilon = M_1 - M_2$$

$$\frac{1}{2} m_3 R^2 \frac{a}{R} = R N_1 - R N_2$$

Po skróceniu:

$$\frac{1}{2} m_3 a = N_1 - N_2$$

Nie znamy naciągów linki. Możemy je wyznaczyć z pierwszych równań:

$$N_1 = Q_1 - (m_1 + m_2)a$$

$$N_2 = m_1 a + Q_2$$

Ciężary Q_1 i Q_2 są równe odpowiednio:

$$Q_1 = (m_1 + m_2)g$$

$$Q_2 = m_1 g$$

Zatem:

$$N_1 = (m_1 + m_2)g - (m_1 + m_2)a$$

$$N_2 = m_1 a + m_1 g$$

Wymnażając nawiasy:

$$N_1 = m_1 g + m_2 g - m_1 a - m_2 a$$

$$N_2 = m_1 a + m_1 g$$

Podstawmy do równania:

$$\frac{1}{2} m_3 a = m_1 g + m_2 g - m_1 a - m_2 a - m_1 a - m_1 g$$

Wyliczamy przyspieszenie liniowe układu:

$$\frac{1}{2} m_3 a + m_1 a + m_2 a + m_1 a = m_2 g$$

$$a \left(\frac{1}{2} m_3 + 2m_1 + m_2 \right) = m_2 g$$

Ostatecznie:

$$a = \frac{m_2 g}{\left(\frac{1}{2} m_3 + 2m_1 + m_2 \right)}$$

b) Siły naciągu nitek już zostały wyliczone wcześniej i wynoszą:

$$\begin{aligned} N_1 &= m_1 g + m_2 g - m_1 a - m_2 a \\ N_2 &= m_1 a + m_1 g \end{aligned}$$

c) Przebytą przez ciężarki drogę policzymy analogicznie jak poprzednio podstawiając jedynie inne a .

$$s = \frac{\frac{m_2 g}{2} t^2}{\frac{1}{2} m_3 + 2m_1 + m_2}$$

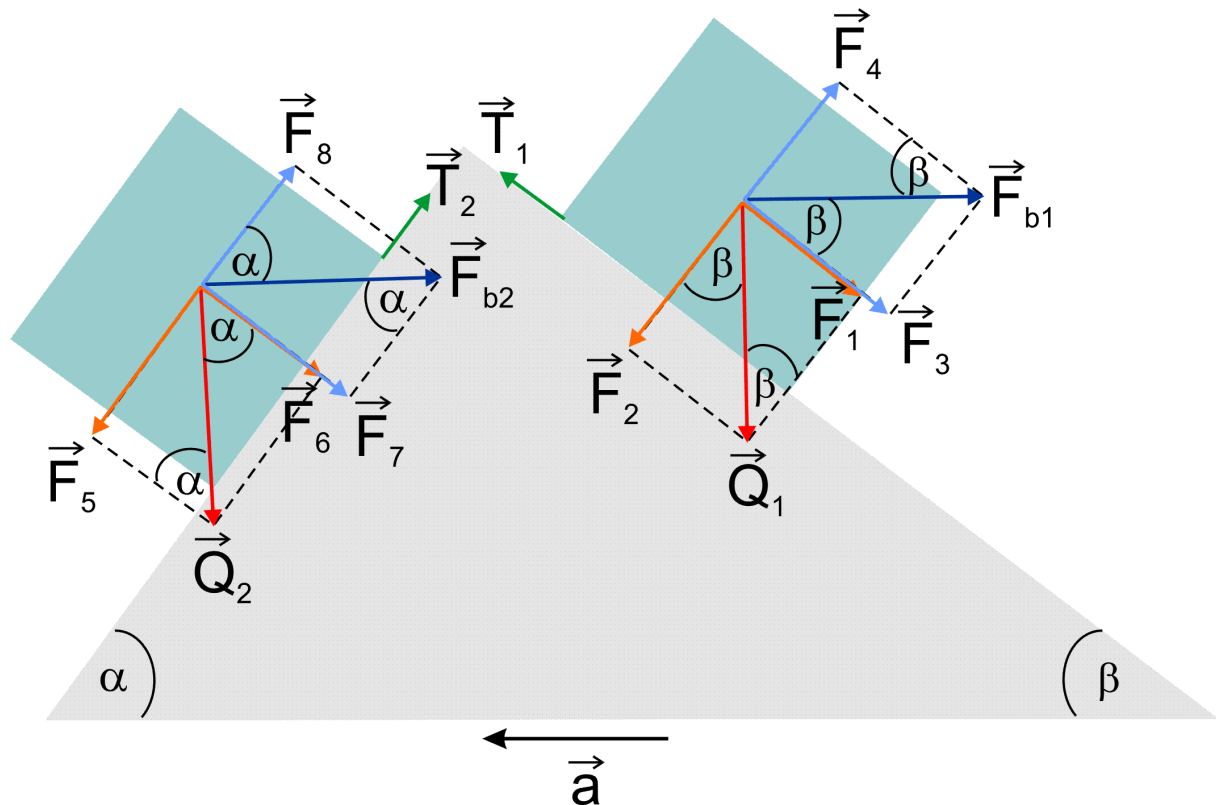
Co po przekształceniu da nam:

$$s = \frac{m_2 g}{m_3 + 4m_1 + 2m_2} t^2$$

Zad.16 Ze szczytu równi pochyłej o kątach przy podstawie 30 i 60 stopni po jej zboczach zsuwają się identyczne ciała. Równia porusza się po płaszczyźnie z przyspieszeniem a w lewą stronę. Jakie musi być wartość tego przyspieszenia aby oba ciała zsunęły się po zboczach równi w jednakowym czasie? Współczynnik tarcia ciał o podłoże równi wynosi 0,5, przyspieszenie ziemskie $g=9,81 \text{ m/s}^2$.

Rozrysujmy na początek wszystkie siły jakie działają na obydwie ciała.

Na każde z ciał działa siła ciężkości $\vec{Q}_1$ i $\vec{Q}_2$, która jest wypadkową dwóch sił działających prostopadle i równolegle do równi. Ponieważ mamy podany współczynnik tarcia, pomiędzy ciałami a podłożem równi będą działały również siły tarcia $\vec{T}_1$ i $\vec{T}_2$. Równia przemieszcza się w lewą stronę z przyspieszeniem a zatem pojawią się siły bezwładności $\vec{F}_{b1}$ i $\vec{F}_{b2}$. Zaznaczmy również kąty pomiędzy siłami.



Rozpoczynamy od napisania, zgodnie z dynamicznym równaniem ruchu wynikającym z II zasady dynamiki Newtona, równań na wypadkowe siły działające na nasze ciała. II zasady dynamiki Newtona będzie miała postać:

$$am = F_w$$

gdzie F_w to wypadkowa siła działająca na dane ciało. Równania te będą miały postać:

$$\begin{aligned} ma_1 &= F_1 + F_3 - T_1 \\ ma_2 &= F_5 - F_8 - T_2 \end{aligned}$$

Jak widać przyspieszenia ruchu ciał na obu zboczach będą inne, bo inne są kąty nachylenia do poziomu oraz drogi po jakich poruszają się ciała.

Należy więc teraz wypisać wszystkie siły działające na ciała po obydwu stronach równi:

$$F_1 = mg \sin \beta$$

$$F_2 = mg \cos \beta$$

$$F_3 = ma \cos \beta$$

$$F_4 = ma \sin \beta$$

$$T_1 = \mu F_{n1} = \mu(F_2 - F_4)$$

$$F_5 = mg \sin \alpha$$

$$F_6 = mg \cos \alpha$$

$$F_7 = ma \sin \alpha$$

$$F_8 = ma \cos \alpha$$

$$T_2 = \mu F_{n2} = \mu(F_6 + F_7)$$

Jak widać siła nacisku $\vec{F}_{n1}$ będzie różnicą składowej prostopadłej siły ciężkości $\vec{Q}_1$ pomniejszona o składową prostopadłą siły $\vec{F}_{b1}$. Z kolei siła nacisku $\vec{F}_{n2}$ będzie sumą składowej prostopadłej siły ciężkości $\vec{Q}_2$ i składowej prostopadłej siły $\vec{F}_{b2}$. Dzieje się tak ponieważ poruszający się klin przyciska ciało z lewej strony równi, a podrywa ciało zsuwające się po stronie prawej równi.

Podstawmy teraz nasze wyznaczone siły do równań na II zasadę dynamiki:

$$ma_1 = mg \sin \beta + ma \cos \beta - \mu(mg \cos \beta - ma \sin \beta)$$

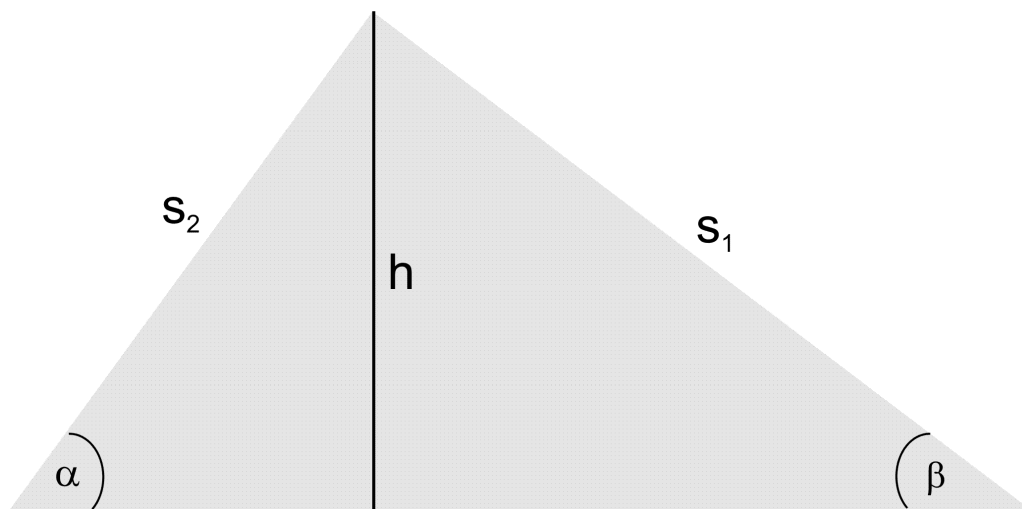
$$ma_2 = mg \sin \alpha - ma \cos \alpha - \mu(mg \cos \alpha + ma \sin \alpha)$$

Po skróceniu mas otrzymamy wyrażenia na przyspieszenia ciał po obu stronach równi:

$$a_1 = g \sin \beta + a \cos \beta - \mu g \cos \beta + \mu a \sin \beta$$

$$a_2 = g \sin \alpha - a \cos \alpha - \mu g \cos \alpha - \mu a \sin \alpha$$

Oznaczmy teraz drogi po których poruszają się ciała jako s_1 i s_2 .



Skoro czas zsuwania ciał ma być po obydwu stronach równi taki sam można te czasy porównać ze sobą. Ponieważ wiemy już jakim ruchem będą poruszać się te ciała skorzystajmy z wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym.

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

U nas $s_0=0$ i $v_0=0$ zatem:

$$s = \frac{at^2}{2}$$

Dla obydwu stron równi:

$$s_1 = \frac{a_1 t^2}{2} \text{ oraz } s_2 = \frac{a_2 t^2}{2}$$

Wyliczmy czasy i porównajmy je ze sobą:

$$t = \frac{2s_1}{a_1} \text{ oraz } t = \frac{2s_2}{a_2}$$

Więc:

$$\frac{s_1}{a_1} = \frac{s_2}{a_2}$$

Nie znamy dróg po jakich poruszają się ciała. Możemy wprowadzić wysokość dla naszej równi. Jak widać z rysunku dzieli nam równię na dwa trójkąty prostokątne i jest ona taka sama dla obydwu stron. Mając dane kąty nachylenia α i β możemy skorzystać z odpowiedniej funkcji trygonometrycznej w celu wyliczenia naszych dróg.

$$\sin \alpha = \frac{h}{s_2} \text{ oraz } \sin \beta = \frac{h}{s_1}$$

Czyli:

$$s_2 = \frac{h}{\sin \alpha} \text{ oraz } s_1 = \frac{h}{\sin \beta}$$

Podstawmy wyliczone drogi do równania $\frac{s_1}{a_1} = \frac{s_2}{a_2}$.

Mamy:

$$\frac{\frac{h}{\sin \beta}}{a_1} = \frac{\frac{h}{\sin \alpha}}{a_2}$$

Po przekształceniach otrzymamy:

$$\frac{a_1}{\sin \alpha} = \frac{a_2}{\sin \beta}$$

Wstawmy teraz za a_1 i a_2 wyliczone wcześniej przyspieszenia:

$$\frac{g \sin \beta + a \cos \beta - \mu g \cos \beta + \mu a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{g \sin \alpha - a \cos \alpha - \mu g \cos \alpha - \mu a \sin \alpha}{\sin \beta}$$

Mamy wyznaczyć przyspieszenie równi a zatem wyłączmy to przyspieszenie przed nawias w składnikach, w których występuje. Podobnie zrobimy z przyspieszeniem ziemskim g :

$$g \left(\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - \mu \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \mu \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \right) = a \left(-\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} - \mu \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} - \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} - \mu \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right)$$

Ponieważ znamy kąty nachyleń przy podstawie równi wstawmy te wartości do powyższego wzoru:

$$g \left(\frac{\sin 30}{\sin 60} - \mu \frac{\cos 30}{\sin 60} - \frac{\sin 60}{\sin 30} + \mu \frac{\cos 60}{\sin 30} \right) = a \left(-\frac{\cos 60}{\sin 30} - \mu \frac{\sin 60}{\sin 30} - \frac{\cos 30}{\sin 60} - \mu \frac{\sin 30}{\sin 60} \right)$$

$$g \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \mu \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} + \mu \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right) = a \left(-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - \mu \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \mu \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)$$

$$g \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \mu - \sqrt{3} + \mu \right) = a \left(-1 - \mu\sqrt{3} - 1 - \mu \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Wyznamy a :

$$a = \frac{g \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \mu - \sqrt{3} + \mu \right)}{-1 - \mu\sqrt{3} - 1 - \mu \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{g \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \right)}{-2 - \mu\sqrt{3} - \mu \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Pozbądźmy się ułamków piętrowych i znaku minus w mianowniku.

$$a = \frac{g \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{2 + \mu \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right)} = \frac{g(3-1)}{2\sqrt{3} + \mu(1+3)} = \frac{2g}{2\sqrt{3} + 4\mu} = \frac{2g}{2(\sqrt{3} + 2\mu)}$$

Czyli:

$$a = \frac{g}{\sqrt{3} + 2\mu}$$

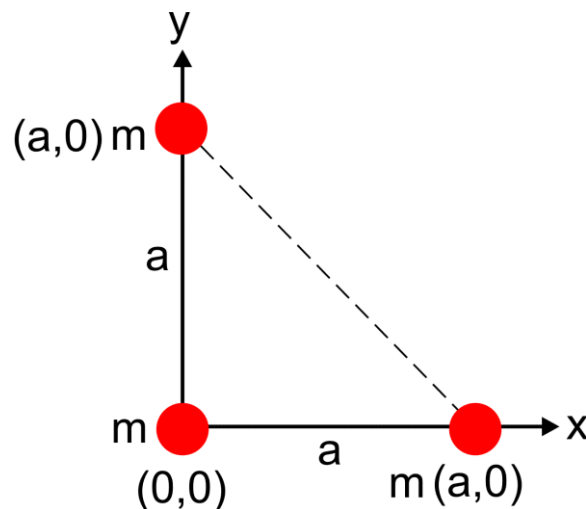
Po podstawieniu danych:

$$a = \frac{9,81 \frac{m}{s^2}}{1,73 + 2 \cdot 0,5} = \frac{9,81 \frac{m}{s^2}}{1,73} = 5,67 \frac{m}{s^2}$$

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

Zad.17 Policzyc środek masy układu punktów o masie m umieszczonych w wierzchołkach trójkąta równoramiennego o ramionach a .

Nasz układ punktów możemy umieścić w układzie współrzędnych tak, że jeden z nich leży w jego środku, a drugi na osi x , a trzeci na osi y (Rys). Możemy więc określić współrzędne każdego z punktów



Rozpiszmy współrzędne środka masy dla poszczególnych osi.

Ogólnie dla wektora położenia zapiszemy:

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^n r_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{r_1 m_1 + r_2 m_2 + \dots + r_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Dla osi x będzie to:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{0 \cdot m + a \cdot m + 0 \cdot m}{3m}$$

$$x_s = \frac{1}{3} a$$

Dla osi y będzie to:

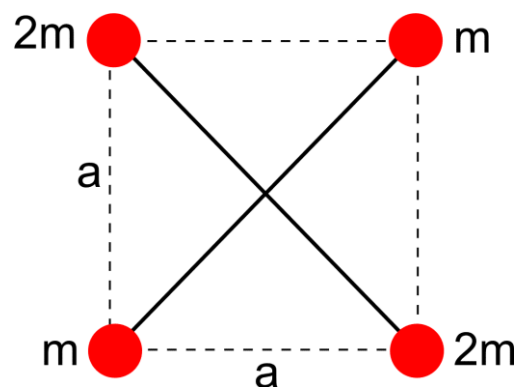
$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{0 \cdot m + 0 \cdot m + am}{3m}$$

Ostatecznie:

$$y_s = \frac{1}{3}a$$

Zatem środek masy układu punktów wypadnie w punkcie przecięcia się wysokości trójkąta równobocznego.

Zad.18 Obliczyć moment bezwładności punktów o masie m umieszczonych w wierzchołkach kwadratu o boku a .



Skorzystamy tu z wzoru na moment bezwładności dla układu mas punktowych:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Gdzie r jest odległością masy od osi obrotu.

U nas odległość ta jest połową przekątnej kwadratu zatem:

$$r = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$$

Podstawiając to do wzoru na moment bezwładności otrzymujemy:

$$I = 6m \cdot \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2} \right)^2$$

Czyli ostatecznie:

$$I = 3ma^2$$

Zad.19 Na równię pochyłą z prędkością 20 m/s wtacza się walec i cienkościenna obręcz. Które ciało osiągnie większą wysokość? Przyspieszenie ziemskie wynosi 9,81 m/s².

Skorzystamy na początku z zasady zachowania energii. Energia potencjalna będzie równa sumie energii kinetycznej ruchu postępowego i kinetycznej ruchu obrotowego:

$$E_p = E_{kp} + E_{ko}$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Nie znamy prędkości kątowej z jaką toczy się walec i obręcz, ale możemy tu skorzystać z zależności pomiędzy prędkością liniową i kątową:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Zatem:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\left(\frac{v}{R}\right)^2}{2}$$

Gdzie I jest momentem bezwładności raz walca raz obręczy.

Moment bezwładności walca jest równy:

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

Po podstawieniu otrzymamy:

$$mgh_1 = \frac{mv^2}{2} + \frac{\frac{mR^2}{2}\left(\frac{v}{R}\right)^2}{2}$$

Po uproszczeniu:

$$gh_1 = \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{4}$$

$$gh_1 = \frac{2}{4}v^2 + \frac{1}{4}v^2 = \frac{3}{4}v^2$$

Czyli:

$$h_1 = \frac{3 v^2}{4 g}$$

Po wstawieniu danych:

$$h_1 = \frac{3 \left(20 \frac{m}{s} \right)^2}{4 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}} = 30,58 m$$

Moment bezwładności obręczy natomiast jest równy:

$$I = mR^2$$

Po podstawieniu otrzymamy:

$$mgh_2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2 \left(\frac{v}{R} \right)^2}{2}$$

Po uproszczeniu:

$$gh_2 = \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{2}$$

$$gh_2 = v^2$$

Czyli:

$$h_2 = \frac{v^2}{g}$$

Po wstawieniu danych:

$$h_2 = \frac{\left(20 \frac{m}{s} \right)^2}{9,81 \frac{m}{s^2}} = 40,77 m$$

Wyżej wtoczy się obręcz.

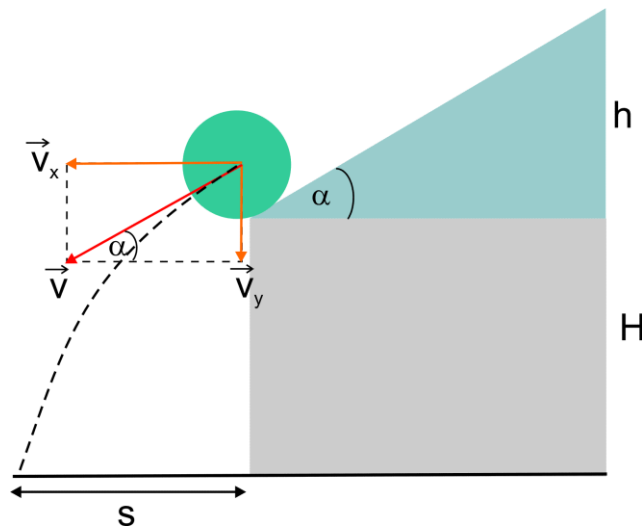
Zad.20 Z równi pochyłej o kącie nachylenia α i wysokości h stacza się jednorodna kula. Równia stoi na skrzyni o wysokości H , Jak daleko od podstawy spadnie kula?

34



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.
Utwór dostępny jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe.

Przyspieszenie ziemskie wynosi g .



Skorzystamy na początku z zasady zachowania energii, aby wyznaczyć prędkość początkową kuli z jaką spadnie ona z krawędzi równi. Energia potencjalna będzie równa sumie energii kinetycznej ruchu postępowego i kinetycznej ruchu obrotowego:

$$E_p = E_{kp} + E_{ko}$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Nie znamy prędkości kątowej z jaką toczy się kula, ale możemy tu skorzystać z zależności pomiędzy prędkością liniową i kątową:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Zatem:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\left(\frac{v}{R}\right)^2}{2}$$

Moment bezwładności kuli jest równy:

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

Po podstawieniu otrzymamy:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{\frac{2mR^2}{5} \left(\frac{v}{R} \right)^2}{2}$$

Po uproszczeniu:

$$gh = \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{5}$$

$$gh = \frac{5}{10}v^2 + \frac{2}{10}v^2 = \frac{7}{10}v^2$$

Czyli:

$$v^2 = \frac{10}{7}gh \rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

Obliczmy teraz jak daleko polecą kula. W kierunku osi y mamy:

$$H = v_y t - \frac{gt^2}{2}$$

$$H = v \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}$$

Utwórzmy równanie kwadratowe, aby wyznaczyć czas lotu kuli:

$$gt^2 - 2v \sin \alpha t + 2H = 0$$

$$\Delta = 4(v^2 \sin^2 \alpha - 2gH)$$

Wyliczmy pierwiastki tego równania:

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} > 0$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} < 0$$

Czyli bierzemy t_1 .

$$t_1 = \frac{2v \sin \alpha + \sqrt{4(v^2 \sin^2 \alpha - 2gH)}}{2g}$$

Naszą odległość upadku kuli s wyliczmy z warunku w kierunku osi x:

$$x(t) = v_x t = v \cos \alpha t$$

$$x(t) = s = v \cos \alpha \frac{2v \sin \alpha + \sqrt{4(v^2 \sin^2 \alpha - 2gH)}}{2g}$$

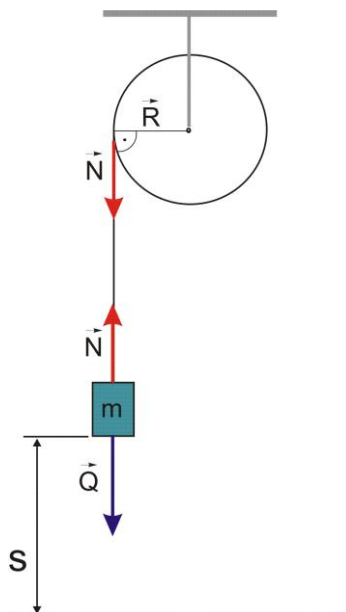
$$x(t) = s = \sqrt{\frac{10}{7}gh} \cos \alpha \frac{\sqrt{\frac{10}{7}gh \sin \alpha} + \sqrt{\left(\frac{10}{7}gh \sin^2 \alpha - 2gH\right)}}{g}$$

$$x(t) = s = \frac{\frac{10}{7}g^2 h \sin \alpha \cos \alpha + \sqrt{\left(\frac{10}{7}gh \sin^2 \alpha - 2gH\right)}}{g}$$

Ponieważ $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ możemy zapisać:

$$x(t) = s = \frac{\frac{5}{7}g^2 h \sin 2\alpha + \sqrt{\left(\frac{5}{7}gh \sin^2 \alpha - gH\right)}}{g}$$

Zad.21 Walec o promieniu R osadzono na poziomej osi i odwinęto z niego nić w ciągu czasu t . Odważnik o masie m zawieszony na końcu nici przebył drogę s od chwili rozpoczęcia ruchu. Obliczyć moment bezwładności walca. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .



Rozpoczynamy od napisania, zgodnie z dynamicznym równaniem ruchu wynikającym z II zasady dynamiki Newtona, równań na wypadkowe siły działające na ciężarek przyjmując kierunek dodatni w dół. Równania te w zapisie wektorowym będą miały postać:

$$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{N}$$

Do wyliczenia przyspieszenia potrzebujemy zapisu skalarnego. Czyli:

$$ma = Q - N$$

$$ma = mg - N$$

Wraz z opadaniem ciężarka nasz walec obraca się z przyspieszeniem ε . Musimy zatem napisać II zasadę dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego:

oraz:

$$M_2 = R \cdot N_2 \cdot \sin 90^\circ$$

Co daje nam:

$$M_1 = R \cdot N_1$$

$$M_2 = R \cdot N_2$$

Dla białki ponieważ jest w ruchu obrotowym musimy zastosować II zasadę dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego:

$$I\varepsilon = M$$

Gdzie I to szukany moment bezwładności walca, ε -przyspieszenie kątowe, zaś M to moment siły działający na białkę. Zatem I będzie równe:

$$I = \frac{M}{\varepsilon}$$

Moment siły z definicji jest równy iloczynowi wektorowemu ramienia i siły:

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$$

Wartość tego momentu siły wyliczymy ze wzoru:

$$M = R \cdot F \cdot \sin \angle(\vec{R}, \vec{F})$$

gdzie siłą F są u nas siły naciągu N , a ramieniem promień walca R .

Zatem moment siły będzie równy

$$M = R \cdot N \cdot \sin 90^\circ$$

Nie znamy przyspieszenia liniowego i kąowego. Pierwsze możemy wyliczyć z równania na drogę jaką ciężarek przebył w ciągu czasu t :

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

U nas s_0 i v_0 są równe zero. Czyli przyspieszenie a wyniesie:

$$a = \frac{2s}{t^2}$$

Przyspieszenie kąowe wyznaczmy ze związku z przyspieszeniem liniowym:

$$\varepsilon = \frac{a}{R}$$

$$I = \frac{NR}{\frac{a}{R}} = \frac{NR^2}{a}$$

Pozostaje jeszcze z II zasady dynamiki dla ruchu postępowego wyznaczyć naciąg nici N :

$$N = mg - ma$$

Oraz wstawić obliczone wcześniej przyspieszenie a .

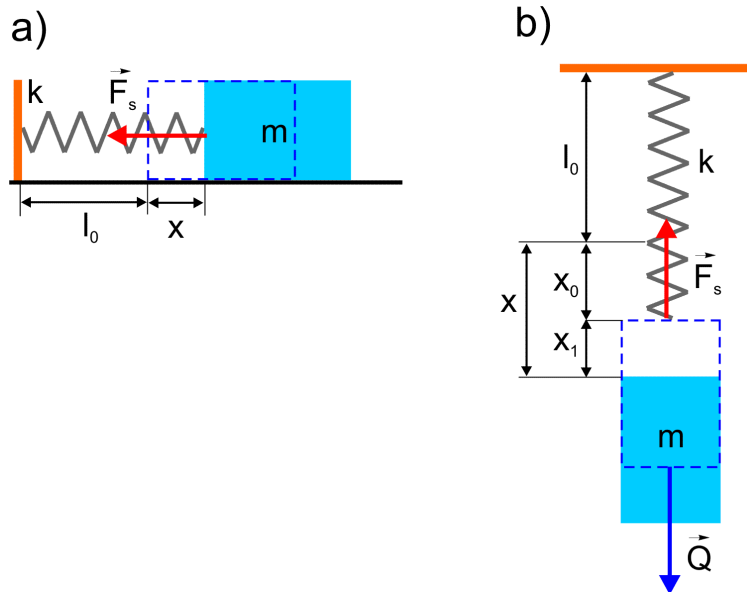
$$I = \frac{NR}{\frac{a}{R}} = \frac{(mg - m \frac{2s}{t^2})R^2}{\frac{2s}{t^2}}$$

Ostatecznie szukany moment bezwładności wyniesie:

$$I = mR^2 \left(\frac{gt^2}{2s} - 1 \right)$$

RUCH DRGAJĄCY

Zad.22 Do sprężyny przyczepionej do ściany o stałej sprężystości k przymocowano klocek o masie m . Następnie klocek ten wychylono z położenia równowagi i puszczono tak, że poruszał się on ruchem drgającym bez tarcia po płaszczyźnie stołu. Jaka będzie częstość drgań klocka? Jak zmieni się ta częstość jeśli klocek ten zostanie powieszony na tej samej sprężynie a następnie wprowadzony w drgania?



Jak widać z rysunku na klocek działa siła sprężystości F_s . Skorzystajmy z II zasady dynamiki Newtona i zapiszmy dynamiczne równanie ruchu dla tego przypadku:

$$Q = F_s$$

$$am = F_s$$

Po rozpisaniu siły sprężystości:

$$am = -kx$$

Minus jest stąd iż siła ta jest przeciwnie skierowana do wychylenia. Zastąpmy przyspieszenie drugą pochodną wychylenia po czasie

$$\frac{d^2x}{dt^2}m = -kx$$

Po podzieleniu obydwu stron przez m otrzymamy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Jest to równanie różniczkowe, którego rozwiązanie będzie miało postać:

$$x = A \cos \omega t$$

Wyliczmy zatem przyspieszenie z powyższego równania, ale najpierw musimy wyliczyć prędkość:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t$$

Podstawmy za x i a do naszego równania różniczkowego:

$$-A\omega^2 \cos \omega t = -\frac{k}{m} A \cos \omega t$$

Po skróceniu otrzymamy:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Czyli częstość drgań klocka wyniesie:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Teraz ten sam klocek powieśmy na sprężynie. Jak widać na Rys. b) na początku nasza sprężyna ma swoją długość spoczynkową l_0 . Po zawieszeniu klocka wydłuży się o x_0 . Dopiero teraz wychylimy ją o x_1 z położenia równowagi i puścimy wprowadzając w drganie.

Jak poprzednio korzystajmy z II zasady dynamiki Newtona i zapiszmy dynamiczne równanie ruchu dla tego przypadku. Będzie ono inne ponieważ na klocek działa jeszcze siła ciężkości Q :

$$am = Q - F_s$$

$$am = mg - kx$$

Podobnie zastąpmy przyspieszenie drugą pochodną wychylenia po czasie

$$\frac{d^2x}{dt^2} m = mg - kx$$

Po podzieleniu obydwu stron przez m otrzymamy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{k}{m} x$$

Całkowite wydłużenie sprężyny x jest u nas równe:

$$x = x_0 + x_1$$

Po podstawieniu:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = g - \frac{k}{m} (x_0 + x_1)$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = g - \frac{k}{m} x_0 - \frac{k}{m} x_1$$

Kiedy klocek wisi swobodnie siła ciężkości jest zrównoważona siłą sprężystości.

Zatem:

$$kx_0 = mg$$

Stąd wyliczmy przyspieszenie ziemskie:

$$\frac{kx_0}{m} = g$$

Po podstawieniu za g:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{k}{m} x_0 - \frac{k}{m} x_0 - \frac{k}{m} x_1$$

Otrzymamy:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{k}{m} x_1$$

Zauważmy, że pojawił się indeks „1” przy x. Wynika to stąd, iż dopiero po rozciągnięciu do x_1 i puszczeniu wprowadzamy klocek w drgania. W x wisi swobodnie.

Postulowane rozwiązanie będzie miało postać:

$$x_1 = A \cos \omega t$$

Podobnie i tu będziemy potrzebowali przyspieszenia, więc najpierw policzmy prędkość:

$$v = \frac{dx_1}{dt} = -A\omega \sin \omega t$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t$$

Podstawmy za x i a do naszego równania różniczkowego:

$$-A\omega^2 \cos \omega t = -\frac{k}{m} A \cos \omega t$$

Po skróceniu otrzymamy:

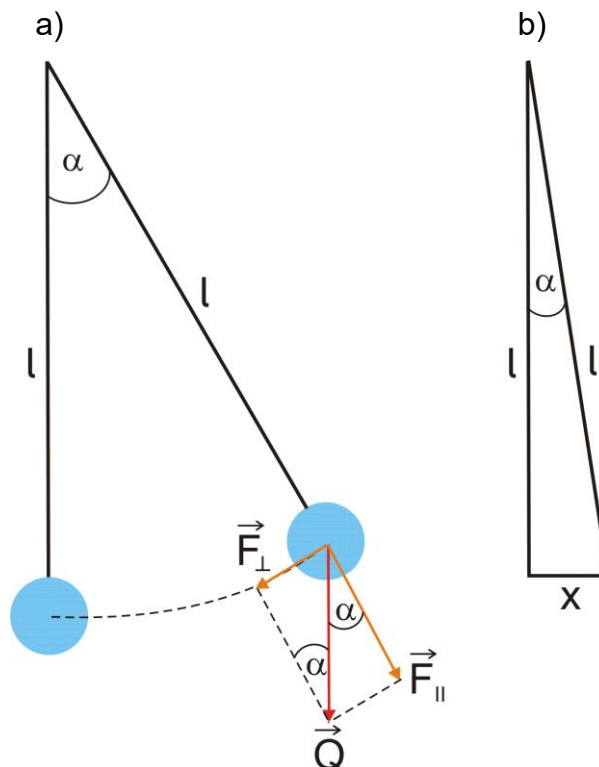
$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Czyli częstość drgań klocka zawieszonego na sprężynie będzie taka sama:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Zmieni się jedynie punkt równowagi wokół którego wykonywane są drgania.

Zad.23 Na nierozciągliwej nici o długości 2,5m zawieszono Kulkę o średnicy 3 cm. Następnie odchyłono ją o kąt 10 stopni i puszczono. Jaki będzie okres drgań powstałego w ten sposób wahadła?



Na kulkę działa siła ciężkości $\vec{Q}$ oraz siła naciągu nitki $\vec{N}$. Po jej odchyleniu o kąt α siła ciężkości staje się wypadkową dwóch sił $\vec{F}_\perp$ działającej wzdłuż nitki i $\vec{F}_\parallel$ działającej równoległe do toru kulki. Siła $\vec{F}_\parallel$ znieśie się z siłą $\vec{N}$ zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona.

Skorzystajmy z II zasady dynamiki Newtona i zapiszmy dynamiczne równanie ruchu dla tego przypadku:

$$am = -F_\perp$$

Po rozpisaniu siły sprężystości:

$$am = -mg \sin \alpha$$

Minus jest stąd iż siła ta jest przeciwnie skierowana do wychylenia. Zastąpmy przyspieszenie drugą pochodną wychylenia po czasie

$$\frac{d^2x}{dt^2} m = -mg \sin \alpha$$

Po podzieleniu obydwu stron przez m otrzymamy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \sin \alpha$$

Ponieważ dla małych kątów możemy przyjąć że po odchyleniu możemy zaniedbać różnicę w długości nitki, otrzymamy trójkąt prostokątny, w którym:

$$\sin \alpha = \frac{x}{l}$$

Zatem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \frac{x}{l}$$

Jest to równanie różniczkowe, którego rozwiązanie będzie miało postać:

$$x = A \cos \omega t$$

Postępując jak w zadaniu poprzednim obliczamy prędkość i przyspieszenie:

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t$$

Podstawmy za x i a do naszego równania różniczkowego:

$$-A\omega^2 \cos \omega t = -\frac{g}{l} A \cos \omega t$$

Po skróceniu otrzymamy:

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

Czyli częstość drgań klocka wyniesie:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Korzystając ze związku pomiędzy okresem drgań a częstością:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Obliczamy okres drgań wahadła:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Należy tu zauważyć, że długość wahadła mierzymy jako sumę długości nici do powierzchni kulki i jej promienia.

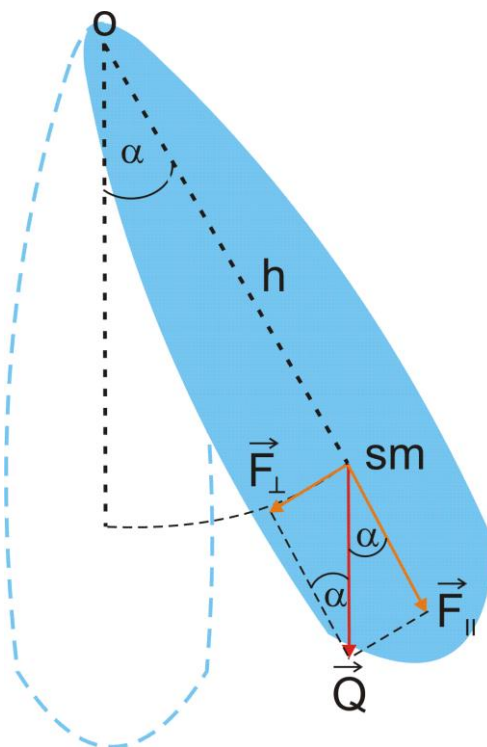
Ostatecznie więc:

$$T = 2\pi\sqrt{l + \frac{d}{2}} \frac{1}{g}$$

Po podstawieniu danych szukany okres drgań wyniesie:

$$T = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{2,5m + \frac{0,03m}{2}}{9,81 \frac{m}{s^2}}} = 1,62s$$

Zad.24 Na osi zawieszono bryłę o nieregularnym kształcie. Następnie odchyłono ją o kąt α stopni i puszczono. Jaki będzie okres drgań tego ciała?



Na bryłę tę działa siła ciężkości $\vec{Q}$. Po odchyleniu ciała o kąt α siła ciężkości staje się wypadkową dwóch sił: $\vec{F}_{\parallel}$ działającej wzdłuż linii łączącej oś obrotu ze środkiem masy ciała (sm) i $\vec{F}_{\perp}$ działającej równolegle do toru po jakim porusza się środek masy.

Skorzystajmy z II zasady dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego i zapiszmy dynamiczne równanie ruchu dla tego przypadku:

$$\varepsilon I = -M_w$$

gdzie M_w jest wypadkowym momentem sił działających na ciało.

Moment siły z definicji jest równy iloczynowi wektorowemu ramienia i siły:

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$$

Wartość tego momentu siły wyliczymy ze wzoru:

$$M = R \cdot F \cdot \sin \angle(\vec{R}, \vec{F})$$

Będziemy mieli tutaj dwa momenty sił odpowiadające dwóm siłom: $\vec{F}_{\perp}$ i $\vec{F}_{\parallel}$. Naszym ramieniem zaś będzie odległość od punktu zaczepienia do środka masy - h .

Zatem momenty sił będą równe:

$$M_{\parallel} = h \cdot F_{\parallel} \cdot \sin 0^\circ = 0$$

Oraz:

$$M_{\perp} = h \cdot F_{\perp} \cdot \sin 90^\circ = h \cdot F_{\perp}$$

Siła $\vec{F}_{\perp}$ jest składową siły grawitacji:

$$F_{\perp} = mg \sin \alpha$$

Nasze równanie na II zasadę dynamiki przyjmie więc postać:

$$\varepsilon I = -M_{\perp}$$

$$\varepsilon I = -hmg \sin \alpha$$

Minus jest stąd iż moment siły jest przeciwnie skierowany do wychylenia. Zastąpmy przyspieszenie kątowne drugą pochodną kąta po czasie

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} I = -hmg \sin \alpha$$

Po podzieleniu obydwu stron przez I otrzymamy:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{hmg}{I}\sin\alpha$$

Dla małych kątów :

$$\sin\alpha = \alpha$$

Zatem:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{hmg}{I}\alpha$$

Jest to równanie różniczkowe, którego rozwiązanie będzie miało postać:

$$\alpha = A\cos\omega t$$

Postępując jak w zadaniu poprzednim obliczamy tym razem prędkość kątową i przyspieszenie kątowe:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -A\omega\sin\omega t$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -A\omega^2\cos\omega t$$

Podstawmy obliczone α i ε do naszego równania różniczkowego:

$$-A\omega^2\cos\omega t = -\frac{hmg}{I}A\cos\omega t$$

Po skróceniu otrzymamy:

$$\omega^2 = \frac{hmg}{I}$$

Czyli częstość drgań klocka wyniesie:

$$\omega = \sqrt{\frac{hmg}{I}}$$

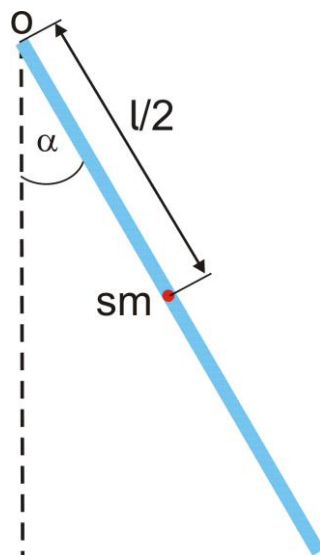
Korzystając ze związku pomiędzy okresem drgań a częstością:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Obliczamy okres drgań wahadła:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{hmg}}$$

Niech teraz naszym ciałem będzie jednorodny pręt o długości $l=50\text{cm}$.



Wówczas odległość od punktu zaczepienia do środka masy wyniesie:

$$h = \frac{l}{2}$$

Moment bezwładności pręta obracającego się wokół jednego z końców wynosi:

$$I = \frac{1}{3} ml^2$$

Podstawmy te dane do naszego równania na okres:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} ml^2}{\frac{l}{2} mg}}$$

Czyli nasz okres będzie równy:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g}}$$

Po podstawieniu danych szukany okres drgań wyniesie:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{0,5\text{m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0,05\text{s}$$

Powyższy przykład można również rozwiązać z wykorzystaniem twierdzenia

48



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.
Utwór dostępny jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe.

Steinera, które mówi, że moment bezwładności ciała względem dowolnej osi obrotu równy jest sumie momentu bezwładności względem osi równoległej i przechodzącej przez środek masy ciała i iloczynowi masy ciała i kwadratu odległości między tymi osiami.

Zapiszemy go jako:

$$I = I_o + mh^2$$

Moment bezwładności I_o jest momentem pręta względem jego środka.

$$I_o = \frac{1}{12} ml^2$$

Zatem:

$$I = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2$$

$$I = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{4}{12} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

Otrzymaliśmy ten wynik jak dla pręta obracającego się względem jego końca tak jak jest to przedstawione na rysunku.

Po skorzystaniu z wyznaczonego wcześniej wzoru:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{hmg}}$$

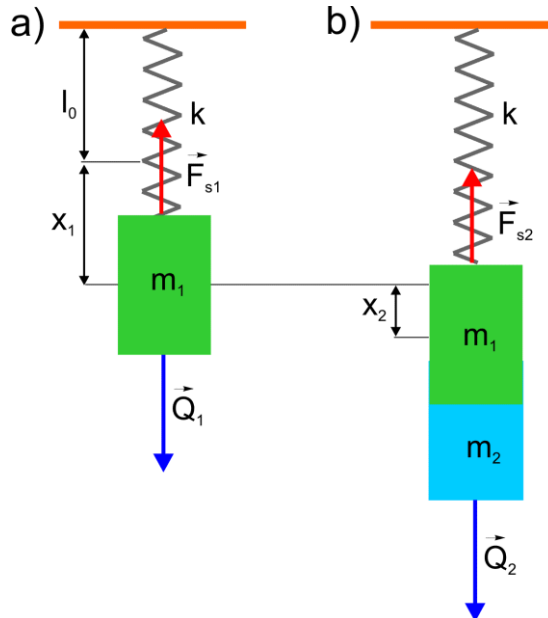
Podstawieniu otrzymamy:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} ml^2}{\frac{l}{2} mg}}$$

Czyli nasz okres będzie równy jak poprzednio:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g}}$$

Zad.25 Na nieważkiej sprężynie o stałej sprężystości k powieszono ciężarek (Rys a). Do niego dowieszono drugi (Rys b) co spowodowało dwukrotną zmianę częstości drgań oraz przesunięcie punktu równowagi układu o odległość 5 cm. Jakie będą częstości drgań w obydwu przypadkach?



Z warunków zadania wiemy, że:

$$\omega_1 = 2\omega_2$$

W ruchu harmonicznym w naszym przypadku mamy:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \text{ oraz } \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m_1}} = 2\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

Po podniesieniu do kwadratu obu stron:

$$\frac{k}{m_1} = 4 \frac{k}{m_1 + m_2}$$

$$m_1 + m_2 = 4m_1$$

Czyli:

$$m_2 = 3m_1$$

Zapiszmy równania równowagi dla obydwu sytuacji:

$$Q_1 = F_{s1}$$

$$Q_2 = F_{s2}$$

$$(m_1 + m_2)g = k(x_1 + x_2)$$

$$m_1g = kx_1$$

Wstawmy policzone m_2 :

$$4m_1g = kx_1 + kx_2$$

$$m_1g = kx_1$$

Odejmijmy równania stronami:

$$3m_1g = kx_2$$

Stąd k będzie równe:

$$k = \frac{3m_1g}{x_2}$$

Po podstawieniu do wzorów na częstości otrzymamy:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{3m_1g}{x_2}}{m_1}} \text{ oraz } \omega_2 = \sqrt{\frac{\frac{3m_1g}{x_2}}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{\frac{3m_1g}{x_2}}{4m_1}}$$

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{x_2}}} \text{ oraz } \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{4x_2}}}$$

Po wstawieniu danych liczbowych:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}}{0,05m}} = 24,26 \frac{1}{s}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}}{4 \cdot 0,05m}} = 12,13 \frac{1}{s}$$