



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



NCBR
Narodowe Centrum Badań i Rozwoju

MATERIAŁY DYDAKTYCZNE

do dodatkowych zajęć wyrównawczych z przedmiotu

Matematyka

dla studentów kierunku

Transport

Opracował zespół w składzie:: Magdalena Sobczak -Kneć

.....
.....
.....
.....

Lublin 2025 r.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.
Utwór dostępny jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe.

Projekt pn. „*POLLUB zieloną transformację*” realizowany jest w ramach programu Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego 2021-2027 współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego Plus zgodnie z umową nr FERS.01.05-IP.08-0049/23-00.

Granice ciągów

Przykład 1. Oblicz granice ciągów:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4n + 8}{5n^2 + 7n - 2}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^5 + 3n^3 - 6n^2 - 2}{n^4 - 2n^3 - 2n + 5}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n^2 - 7n + 2}{-5n^2 - 4n + 7}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - 5n - 3n^4}{3 + 4n - 7n^3}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 + 3n + 20}{25n^5 - 2n^3 + 6n}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n + 2)(3n - 2)}{(4n + 6)(2n + 3)}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n} + 3)^2}{5n + 12}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9n^3 + n^2}{4n^3 + 5}}$$

Rozwiązanie:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4n + 8}{5n^2 + 7n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 - \frac{4}{n} - \frac{8}{n^2}\right)}{n^2 \left(5 + \frac{7}{n} - \frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{n} - \frac{8}{n^2}}{5 + \frac{7}{n} - \frac{2}{n^2}} = \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 - 0} = \frac{3}{5}.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^5 + 3n^3 - 6n^2 - 2}{n^4 - 2n^3 - 2n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left(7n + \frac{3}{n} - \frac{6}{n^2} - \frac{2}{n^4}\right)}{n^4 \left(1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} + \frac{5}{n^4}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n + \frac{3}{n} - \frac{6}{n^2} - \frac{2}{n^4}}{1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} + \frac{5}{n^4}} = \frac{\infty + 0 - 0 - 0}{1 - 0 - 0 + 0} = \infty.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n^2 - 7n + 2}{-5n^2 - 4n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3n + 1 - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^2 \left(-5 - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1 - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2}}{-5 - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}} = \frac{\infty + 1 - 0 + 0}{-5 - 0 + 0} = \frac{\infty}{-5} = -\infty.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - 5n - 3n^4}{3 + 4n - 7n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^2} - 3n\right)}{n^3 \left(\frac{3}{n^3} + \frac{4}{n^2} - 7\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^2} - 3n}{\frac{3}{n^3} + \frac{4}{n^2} - 7} = \frac{0 - 0 - \infty}{0 + 0 - 7} = \frac{-\infty}{-7} = +\infty.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 + 3n + 20}{25n^5 - 2n^3 + 6n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(\frac{5}{n} + \frac{3}{n^4} + \frac{20}{n^5}\right)}{n^5 \left(25 - \frac{2}{n^2} + \frac{6}{n^4}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n} + \frac{3}{n^4} + \frac{20}{n^5}}{25 - \frac{2}{n^2} + \frac{6}{n^4}} = \frac{0 + 0 + 0}{25 - 0 + 0} = 0.$$

$$\begin{aligned} 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)(3n-2)}{(4n+6)(2n+3)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2-4}{2(2n+3)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2-4}{2(4n^2+12n+9)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(9 - \frac{4}{n^2}\right)}{2n^2 \left(4 + \frac{12}{n} + \frac{9}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 - \frac{4}{n^2}}{2 \left(4 + \frac{12}{n} + \frac{9}{n^2}\right)} = \frac{9-0}{2(4+0+0)} = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n}+3)^2}{5n+12} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+6\sqrt{n}+9}{5n+12} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{6}{\sqrt{n}} + \frac{9}{n}\right)}{n \left(5 + \frac{12}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{6}{\sqrt{n}} + \frac{9}{n}}{5 + \frac{12}{n}} = \\ &= \frac{1+0+0}{5+0} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9n^3+n^2}{4n^3+5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^3 \left(9 + \frac{1}{n}\right)}{n^3 \left(4 + \frac{5}{n^3}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9 + \frac{1}{n}}{4 + \frac{5}{n^3}}} = \sqrt{\frac{9+0}{4+0}} = \frac{3}{2}.$$

Przykład 2. Oblicz granice ciągów:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{7n^2+5} - \sqrt{7n^2+3n+2} \right)$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n-3 - \sqrt{n^2+6n} \right)$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{5n^2+3n-2} - \sqrt{5n^2-7n+3}}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2-7n} - \sqrt{4n^2-8})}{(\sqrt{49n^2+5n-3} - \sqrt{49n^2-6n})}$$

Rozwiązanie: We wszystkich przykładach w tym zadaniu występuje wyrażenie nieoznaczone postaci: $[\infty - \infty]$. Będziemy próbować tak przekształcić to wyrażenie, by móc skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia postaci: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$\begin{aligned} 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{7n^2+5} - \sqrt{7n^2+3n+2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{7n^2+5})^2 - (\sqrt{7n^2+3n+2})^2}{(\sqrt{7n^2+5} + \sqrt{7n^2+3n+2})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2+5 - 7n^2-3n-2}{(\sqrt{7n^2+5} + \sqrt{7n^2+3n+2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+3}{(\sqrt{7n^2+5} + \sqrt{7n^2+3n+2})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+3}{\left(\sqrt{n^2 \left(7 + \frac{5}{n^2}\right)} + \sqrt{n^2 \left(7 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(-3 + \frac{3}{n}\right)}{n \left(\sqrt{7 + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{7 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{3}{n}}{\sqrt{7 + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{7 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}} = \frac{-3+0}{\sqrt{7+0} + \sqrt{7+0+0}} = \frac{-3}{2\sqrt{7}} = \frac{-3\sqrt{7}}{14}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{5n^2 + 3n - 2} - \sqrt{5n^2 - 7n + 3}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \left(\sqrt{5n^2 + 3n - 2} + \sqrt{5n^2 - 7n + 3} \right)}{\left(\sqrt{5n^2 + 3n - 2} \right)^2 - \left(\sqrt{5n^2 - 7n + 3} \right)^2} = \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \left(\sqrt{5n^2 + 3n - 2} + \sqrt{5n^2 - 7n + 3} \right)}{5n^2 + 3n - 2 - 5n^2 + 7n - 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \left(\sqrt{n^2 \left(5 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} \right)} + \sqrt{n^2 \left(5 - \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2} \right)} \right)}{10n - 5} = \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n \left(\sqrt{5 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}} + \sqrt{5 - \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}} \right)}{n \left(10 - \frac{5}{n} \right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \left(\sqrt{5 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}} + \sqrt{5 - \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}} \right)}{\left(10 - \frac{5}{n} \right)} = \\
 \frac{3 \left(\sqrt{5 + 0 - 0} + \sqrt{5 - 0 + 0} \right)}{10 - 0} &= \frac{6\sqrt{5}}{10} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - 3 - \sqrt{n^2 + 6n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - 3)^2 - \left(\sqrt{n^2 + 6n} \right)^2}{\left(n - 3 + \sqrt{n^2 + 6n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 6n + 9 - n^2 - 6n}{\left(n - 3 + \sqrt{n^2 + 6n} \right)} = \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-12n + 9}{\left(n - 3 + \sqrt{n^2 + 6n} \right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-12n + 9}{\left(n - 3 + \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{6}{n} \right)} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(-12 + \frac{9}{n} \right)}{n \left(1 - \frac{3}{n} + \sqrt{1 + \frac{6}{n}} \right)} = \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-12 + \frac{9}{n}}{1 - \frac{3}{n} + \sqrt{1 + \frac{6}{n}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-12 + \frac{9}{n}}{1 - \frac{3}{n} + \sqrt{1 + \frac{6}{n}}} = \frac{-12 + 0}{1 - 0 + 1 + 0} = \frac{-12}{2} = -6.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{4n^2 - 7n} - \sqrt{4n^2 - 8} \right)}{\left(\sqrt{49n^2 + 5n - 3} - \sqrt{49n^2 - 6n} \right)} &= \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{4n^2 - 7n} \right)^2 - \left(\sqrt{4n^2 - 8} \right)^2}{\left(\sqrt{4n^2 - 7n} + \sqrt{4n^2 - 8} \right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{49n^2 + 5n - 3} + \sqrt{49n^2 - 6n} \right)}{\left(\sqrt{49n^2 + 5n - 3} \right)^2 - \left(\sqrt{49n^2 - 6n} \right)^2} &= \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 7n - 4n^2 + 8}{\left(\sqrt{4n^2 - 7n} + \sqrt{4n^2 - 8} \right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{49n^2 + 5n - 3} + \sqrt{49n^2 - 6n} \right)}{49n^2 + 5n - 3 - 49n^2 + 6n} &= \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n + 8}{\left(\sqrt{4n^2 - 7n} + \sqrt{4n^2 - 8} \right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{49n^2 + 5n - 3} + \sqrt{49n^2 - 6n} \right)}{11n - 3} &= \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n + 8}{\left(\sqrt{n^2 \left(4 - \frac{7}{n} \right)} + \sqrt{n^2 \left(4 - \frac{8}{n^2} \right)} \right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{n^2 \left(49 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2} \right)} + \sqrt{n^2 \left(49 - \frac{6}{n} \right)} \right)}{11n - 3} &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(-7 + \frac{8}{n} \right)}{n \left(\sqrt{4 - \frac{7}{n}} + \sqrt{4 - \frac{8}{n^2}} \right)} \cdot \frac{n \left(\sqrt{49 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2}} + \sqrt{49 - \frac{6}{n}} \right)}{n \left(11 - \frac{3}{n} \right)} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7 + \frac{8}{n}}{\sqrt{4 - \frac{7}{n}} + \sqrt{4 - \frac{8}{n^2}}} \cdot \frac{\sqrt{49 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2}} + \sqrt{49 - \frac{6}{n}}}{11 - \frac{3}{n}} &= \\ = \frac{-7 + 0}{\sqrt{4 - 0} + \sqrt{4 - 0}} \cdot \frac{\sqrt{49 + 0 - 0} + \sqrt{49 - 0}}{11 - 0} = \frac{-7}{4} \cdot \frac{14}{11} = \frac{-49}{22}. \end{aligned}$$

W Przykładzie 3 wykorzystamy następującą zależność dotyczącą granicy ciągu geometrycznego. Granica ciągu geometrycznego $a_n = q^n$ zależy od wartości q :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{gdy } |q| < 1 \\ 1 & \text{gdy } q = 1 \\ \infty & \text{gdy } q > 1 \\ \text{nie istnieje} & \text{gdy } q \leq -1 \end{cases} \quad (1)$$

Zatem wykorzystując wzór (1) otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{4} \right)^n \text{ nie istnieje.}$$

Przykład 3. Oblicz granice ciągów:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 3^{2n} - 5}{10 \cdot 9^n + 3}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 5^n - 6}{4 + 7 \cdot 4^n}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4^{n+3}}{2^{2n+3} + 5^{n+2}}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1} - 3^{2n+3}}{2^{3n} + 10}.$$

Rozwiązanie: We wszystkich przykładach w tym zadaniu postępować będziemy analogicznie do Przykładu 1 wykorzystując prawa działań na potęgach i wzór 1.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 3^{2n} - 5}{10 \cdot 9^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 9^n - 5}{10 \cdot 9^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n \left(7 - \frac{5}{9^n}\right)}{9^n \left(10 + \frac{3}{9^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{5}{9^n}}{10 + \frac{3}{9^n}} = \frac{7 - 0}{10 + 0} = \frac{7}{10}.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 5^n - 6}{4 + 7 \cdot 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \left(4 \cdot \frac{5^n}{4^n} - \frac{6}{4^n}\right)}{4^n \left(\frac{4}{4^n} + 7\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^n - \frac{6}{4^n}}{\frac{4}{4^n} + 7} = \frac{4\infty - 0}{0 + 7} = \frac{\infty}{7} = \infty.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4^{n+3}}{2^{2n+3} + 5^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4^n \cdot 4^3}{2^{2n} \cdot 2^3 + 5^n \cdot 5^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4^n \cdot 64}{4^n \cdot 8 + 5^n \cdot 25} =$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left(\frac{2}{5^n} + \frac{4^n}{5^n} \cdot 64\right)}{5^n \left(\frac{4^n}{5^n} \cdot 8 + 25\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{5^n} + \frac{4^n}{5^n} \cdot 64}{\frac{4^n}{5^n} \cdot 8 + 25} = \frac{0 + 0 \cdot 64}{0 \cdot 8 + 25} = \frac{0}{25} = 0.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1} - 3^{2n+3}}{2^{3n} + 10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n \cdot 6 - 3^{2n} \cdot 3^3}{2^{3n} + 10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n \cdot 6 - 9^n \cdot 27}{8^n + 10} =$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n \left(\frac{6^n}{8^n} \cdot 6 - \frac{9^n}{8^n} \cdot 27\right)}{8^n \left(1 + \frac{10}{8^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 6 - \left(\frac{9}{8}\right)^n \cdot 27}{1 + \frac{10}{8^n}} = \frac{0 \cdot 6 - \infty \cdot 27}{1 + 0} = \frac{-\infty}{1} = -\infty.$$

W Przykładzie 4 wykorzystamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. (o ciągach z granicą e) Jeżeli ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich jest rozbieżny do ∞ , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Liczba e to tzw. liczba Eulera, jest równa $e \approx 2,7$. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także wtedy, gdy ciąg (a_n) o wyrazach ujemnych jest rozbieżny do $-\infty$.

Przykład 4. Oblicz granice ciągów:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{n}\right)^n$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+7}{n+5}\right)^{4-3n}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3-8}{n^3}\right)^{n^3}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{3n+2}\right)^{5n+7}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n+3}{8n+5}\right)^{7n^2}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 7}{3n^2 + 4} \right)^{2n+3}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n^2 + 7n + 2}{3n^2 + 3n + 5} \right)^{5-8n}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 3}{2n^2 + 5} \right)^{7-5n^2}$$

Rozwiązanie:

1. Korzystając z twierdzenia 1 dla ciągu $a_n = \frac{n}{7}$, który jest ciągiem o wyrazach dodatnich rozbieżnym do $+\infty$, otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{7}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{7}} \right)^{\frac{n}{7}} \right]^7 = e^7.$$

2. Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - 8}{n^3} \right)^{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^3} - \frac{8}{n^3} \right)^{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{n^3} \right)^{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^3}{-8}} \right)^{n^3}$$

Korzystając z twierdzenia 1 dla ciągu $a_n = \frac{n^3}{-8}$, który jest ciągiem o wyrazach ujemnych rozbieżnym do $-\infty$, otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - 8}{n^3} \right)^{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^3}{-8}} \right)^{\frac{n^3}{-8}} \right]^{-8} = e^{-8}.$$

3. Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+7}{n+5} \right)^{4-3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5+2}{n+5} \right)^{4-3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n+5} + \frac{2}{n+5} \right)^{4-3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+5}{2}} \right)^{4-3n}$$

Korzystając z twierdzenia 1 dla ciągu $a_n = \frac{n+5}{2}$, który jest ciągiem o wyrazach dodatnich rozbieżnym do ∞ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+7}{n+5} \right)^{4-3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n+5}{2}} \right)^{\frac{n+5}{2}} \right]^{\frac{(4-3n)(2)}{n+5}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-3n)(2)}{n+5}} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(8-6n)}{n+5}} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\frac{8}{n} - 6)}{n(1 + \frac{5}{n})}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{8}{n} - 6}{1 + \frac{5}{n}}} = e^{\frac{0-6}{1+0}} = e^{-6}. \end{aligned}$$

4. Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{3n+2} \right)^{5n+7} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2-6}{3n+2} \right)^{5n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+2} - \frac{6}{3n+2} \right)^{5n+7} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{3n+2} \right)^{5n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n+2}{-6}} \right)^{5n+7} \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia 1 dla ciągu $a_n = \frac{3n+2}{-6}$, który jest ciągiem o wyrazach ujemnych rozbieżnym do $-\infty$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{3n+2} \right)^{5n+7} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3n+2}{-6}} \right)^{\frac{3n+2}{-6}} \right]^{\frac{(5n+7)(-6)}{3n+2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n+7)(-6)}{3n+2}} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-30n-42}{3n+2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(-30-\frac{42}{n})}{n(3+\frac{2}{n})}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-30-\frac{42}{n}}{3+\frac{2}{n}}} = e^{\frac{-30-0}{3+0}} = e^{-10}. \end{aligned}$$

5. Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n+3}{8n+5} \right)^{7n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n+5-2}{8n+5} \right)^{7n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n+5}{8n+5} - \frac{2}{8n+5} \right)^{7n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{8n+5} \right)^{7n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{8n+5}{-2}} \right)^{7n^2} \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia 1 dla ciągu $a_n = \frac{8n+5}{-2}$, który jest ciągiem o wyrazach ujemnych rozbieżnym do $-\infty$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n+3}{8n+5} \right)^{7n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{8n+5}{-2}} \right)^{\frac{8n+5}{-2}} \right]^{\frac{(7n^2)(-2)}{8n+5}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-14n^2}{8n+5}} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-14n^2}{n(8+\frac{5}{n})}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-14n}{8+\frac{5}{n}}} = e^{\frac{-14 \cdot \infty}{8+0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

6. Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+7}{3n^2+4} \right)^{2n+3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4+3}{3n^2+4} \right)^{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4}{3n^2+4} + \frac{3}{3n^2+4} \right)^{2n+3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{3n^2+4} \right)^{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n^2+4}{3}} \right)^{2n+3} \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia 1 dla ciągu $a_n = \frac{3n^2+4}{3}$, który jest ciągiem o wyrazach dodatnich rozbieżnym do ∞ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+7}{3n^2+4} \right)^{2n+3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3n^2+4}{3}} \right)^{\frac{3n^2+4}{3}} \right]^{\frac{(2n+3)3}{3n^2+4}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+9}{3n^2+4}} = \\ e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{6}{n} + \frac{9}{n^2} \right)}{n^2 \left(3 + \frac{4}{n^2} \right)}} &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{n} + \frac{9}{n^2}}{3 + \frac{4}{n^2}}} = e^{\frac{0+0}{3+0}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

7. Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+3}{2n^2+5} \right)^{7-5n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+5-2}{2n^2+5} \right)^{7-5n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+5}{2n^2+5} - \frac{2}{2n^2+5} \right)^{7-5n^2} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{2n^2+5} \right)^{7-5n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n^2+5}{-2}} \right)^{7-5n^2} \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia 1 dla ciągu $a_n = \frac{2n^2+5}{-2}$, który jest ciągiem o wyrazach ujemnych rozbieżnym do $-\infty$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+3}{2n^2+5} \right)^{7-5n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2n^2+5}{-2}} \right)^{\frac{2n^2+5}{-2}} \right]^{\frac{(7-5n^2)(-2)}{2n^2+5}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^2-14}{2n^2+5}} = \\ e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(10 - \frac{14}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{5}{n^2} \right)}} &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10 - \frac{14}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^2}}} = e^{\frac{10-0}{2+0}} = e^5. \end{aligned}$$

8. Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+7n+2}{3n^2+3n+5} \right)^{5-8n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+3n+4n+5-3}{3n^2+3n+5} \right)^{5-8n} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+3n+5}{3n^2+3n+5} + \frac{4n-3}{3n^2+3n+5} \right)^{5-8n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4n-3}{3n^2+3n+5} \right)^{5-8n} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n^2+3n+5}{4n-3}} \right)^{5-8n} \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia 1 dla ciągu $a_n = \frac{3n^2+3n+5}{4n-3}$, który jest ciągiem o wyrazach

dodatnich rozbieżnym do ∞ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 7n + 2}{3n^2 + 3n + 5} \right)^{5-8n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3n^2 + 3n + 5}{4n - 3}} \right)^{\frac{3n^2 + 3n + 5}{4n - 3}} \right]^{\frac{(5-8n)(4n-3)}{3n^2 + 3n + 5}} = \\ e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5-8n)(4n-3)}{3n^2 + 3n + 5}} &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-32n^2 + 44n - 15}{3n^2 + 3n + 5}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(-32 + \frac{44}{n} - \frac{15}{n^2} \right)}{n^2 \left(3 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} \right)}} = \\ e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-32 + \frac{44}{n} - \frac{15}{n^2}}{3 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}} &= e^{\frac{-32+0-0}{3+0+0}} = e^{-\frac{32}{3}}. \end{aligned}$$

Granice funkcji

Przykład 5. Oblicz granice funkcji:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x - 5}{3x^2 - 5}$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^3 + 2x^2 - 5}{3x^2 - 4x + 1}$

Rozwiązanie:

1. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x - 5) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 5 = -5$ oraz $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5) = 3 \cdot 2^2 - 5 = 7$,
więc

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x - 5}{3x^2 - 5} = \frac{-5}{7}.$$

2. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow -1} (4x^3 + 2x^2 - 5) = 4 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 5 = -4 + 2 - 5 = -7$ oraz
 $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 4x + 1) = 3 \cdot (-1)^2 + 4 + 1 = 8$, więc

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^3 + 2x^2 - 5}{3x^2 - 4x + 1} = \frac{-7}{8}.$$

Przykład 6. Oblicz granice funkcji:

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$

3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$

4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x - 3}$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}$

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^3 - 2x^2 + 7x - 14}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$

8. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3}{x^3 + 1} - \frac{1}{x + 1} \right)$

Rozwiązanie:

1. Zauważmy, że jeśli wstawimy za x wartość -3 do licznika i do mianownika, to
otrzymamy symbol $\frac{0}{0}$. Należy zatem rozłożyć licznik na czynniki. Użyjemy wzoru

skrótowego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{1} = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 3) = -3 - 3 = -6.$$

2. Wstawiając za x wartość 3 do licznika i do mianownika, to otrzymamy symbol $\frac{0}{0}$.

Należy zatem rozłożyć licznik na czynniki. Użyjemy wzoru skrótowego mnożenia

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{1} = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 9) = 3^2 + 3 \cdot 3 + 9 = 27.$$

3. Wstawiając za x wartość -2 do licznika i do mianownika, to otrzymamy symbol

$\frac{0}{0}$. Rozłożymy licznik i mianownik na czynniki, używając odpowiedniego wzoru skrótowego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ i $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 2)(x^2 + 4)}{x^2 - 2x + 4} &= \frac{(-2 - 2)((-2)^2 + 4)}{(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4} = \frac{-4 \cdot 8}{4 + 4 + 4} = -\frac{32}{12} = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

4. Wstawiając $x = 3$ do licznika i do mianownika, to otrzymamy symbol $\frac{0}{0}$. Należy

rozłożyć licznik i mianownik na czynniki. Łatwo zauważyć, że w liczniku mamy wzór

skrótowego mnożenia $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, a w mianowniku mamy funkcję

kwadratową o wyróżniku Δ dodatnim. Mamy $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) = 16$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 4$.

Stosując wzory na pierwiastki funkcji kwadratowej otrzymujemy $x_1 = \frac{-(-2) - 4}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} =$

-1 , oraz $x_2 = \frac{-(-2) + 4}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$.

Mamy

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)^2}{(x + 1)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x + 1} = \frac{3 - 3}{3 + 1} = 0.$$

5. Wstawiając $x = 1$ do licznika i mianownika, otrzymujemy symbol $\frac{0}{0}$. Zatem należy

rozłożyć licznik i mianownik na czynniki. Zauważmy, że w liczniku można wykorzystać

metodę grupowania wyrazów, zaś w mianowniku wzoru skróconego mnożenia $(a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ oraz $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Mamy

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^2 - 1)$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x^2 - 1)(x - 1)(x + 1)$$

Zatem otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

6. Wstawiając $x = 2$ do licznika i mianownika, otrzymujemy symbol $\frac{0}{0}$. Rozłożymy licznik i mianownik na czynniki, wykorzystując metodę grupowania wyrazów. Mamy

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = x^2(x - 2) + 4(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 4)$$

$$x^3 - 2x^2 + 7x - 14 = x^2(x - 2) + 7(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 7)$$

Zatem otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^3 - 2x^2 + 7x - 14} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 4)}{(x - 2)(x^2 + 7)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x^2 + 7} = \frac{2^2 + 4}{2^2 + 7} = \frac{8}{11}.$$

7. Wstawiając $x = 1$ do licznika i mianownika otrzymujemy symbol $\frac{0}{0}$. Rozłożymy licznik i mianownik na czynniki. Zarówno w liczniku jak i mianowniku wykorzystamy schemat Hormera, aby podzielić odpowiednie wielomiany przez $x - 1$. Dla wielomianu z licznika, tzn. $3x^3 - 7x^2 + 5x - 1$ mamy

	3	-7	5	-1
1	3	-4	1	0

Zatem

$$3x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = (x - 1)(3x^2 - 4x + 1).$$

Pozostała do rozłożenia funkcja kwadratowa. W tym celu użyjemy wyróżnika funkcji kwadratowej i wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4, \sqrt{\Delta} = 2, x_1 = \frac{4-2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2+4}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1.$$

Mamy zatem

$$3x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = (x - 1)(3x^2 - 4x + 1) = (x - 1)3 \left(x - \frac{1}{3}\right) (x - 1) = 3(x - 1)^2 \left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Analogicznie rozkładamy wielomian z mianownika, tzn. $2x^3 - x^2 - 4x + 3$. Mamy

	2	-1	-4	3
1	2	1	-3	0

Zatem

$$2x^3 - x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(2x^2 + x - 3).$$

Pozostała do rozłożenia funkcja kwadratowa $2x^2 + x - 3$. Mamy.

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25, \sqrt{\Delta} = 5, x_1 = \frac{-1-5}{2 \cdot 2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{-1+5}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1.$$

Mamy zatem

$$2x^3 - x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(2x^2 + x - 3) = (x - 1)2 \left(x + \frac{3}{2}\right) (x - 1) = 2(x - 1)^2 \left(x + \frac{3}{2}\right).$$

Stosując powyższe rozkłady licznika i mianownika mamy

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1}{2x^3 - x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x - 1)^2 \left(x - \frac{1}{3}\right)}{2(x - 1)^2 \left(x + \frac{3}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{2x + 3} = \frac{2}{5}.$$

8. Wstawiając $x = -1$ do mianowników obu wyrażeń, otrzymujemy symbol $\infty - \infty$.

Rozłożymy mianownik $x^3 + 1$ na czynniki, wykorzystując wzór skróconego mnożenia $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Mamy

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3}{x^3 + 1} - \frac{1}{x + 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} - \frac{1}{x + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} - \frac{x^2 - x + 1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + x - x^2}{(x + 1)(x^2 - x + 1)}.\end{aligned}$$

Teraz mamy $\frac{0}{0}$. Przedstawimy funkcję kwadratową $2 + x - x^2$, w postaci iloczynowej, o ile tylko istnieje. Mamy

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9, \text{ zatem } x_1 = \frac{-1-3}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2 \text{ i } x_2 = \frac{-1+3}{2 \cdot (-1)} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + x - x^2}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x + 2}{x^2 - x + 1} = \frac{1 + 2}{(-1)^2 + 1 + 1} = 1.$$

Przykład 7. Oblicz granice funkcji:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 3x^4 - 5x^2}{9x^5 + 8}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^6 + 4x^3 - 5}{2x^3 - 5x^2 + 4}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x^2 + 5}{5x^7 - x^3 + 4}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 \cdot \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} \right)$

Rozwiązanie: Zauważmy, że gdy $x \rightarrow \infty$ to do obliczania granic funkcji możemy użyć metod stosowanych przy obliczaniu granic ciągów.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 3x^4 - 5x^2}{9x^5 + 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 \left(7 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^3} \right)}{x^5 \left(9 + \frac{8}{x^5} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^3}}{9 + \frac{8}{x^5}} = \frac{7 + 0 - 0}{9 + 0} = \frac{7}{9}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x^2 + 5}{5x^7 - x^3 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 \left(\frac{4}{x^4} + \frac{7}{x^5} + \frac{5}{x^7} \right)}{x^7 \left(5 - \frac{1}{x^4} + \frac{4}{x^7} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x^4} + \frac{7}{x^5} + \frac{5}{x^7}}{5 - \frac{1}{x^4} + \frac{4}{x^7}} = \frac{0 + 0 + 0}{5 - 0 + 0} = 0.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^6 + 4x^3 - 5}{2x^3 - 5x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(-3x^3 + 4 - \frac{5}{x^3} \right)}{x^3 \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 4 - \frac{5}{x^3}}{2 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^3}} = \frac{-\infty + 4 - 0}{2 - 0 + 0} = -\infty.$$

4. Zauważmy, że w przykładzie tym mamy doczynienia z sybolem nieoznaczonym postaci $[\infty \cdot 0]$. Ropoczniemy od przedstawienia wyrażenia w nawiasie w postaci jednego ułamka. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 \cdot \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 \cdot \left(\frac{x-3-x+4}{(x-4)(x-3)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2 - 7x + 12} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2 \left(1 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}} = \frac{3}{1 - 0 + 0} = 3.$$

Przykład 8. Oblicz granice funkcji:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{7x^2 + 3x + 5} - \sqrt{7x^2 + 5x + 3}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 5} - \sqrt{4x^2 - 3x} \right)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{4x + 1} - \sqrt{11 - x}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x + 5} - 3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{13 - x}}{\sqrt{x + 5} - \sqrt{3x - 3}}$$

Rozwiązanie:

1. W przykładzie tym w mianowniku mamy doczynienia z sybolem nieoznaczonym $[\infty - \infty]$. Aby pozbyć się symbolu nieoznaczonego musimy rozszerzyć ułamek przez $\sqrt{7x^2 + 3x + 5} + \sqrt{7x^2 + 5x + 3}$, a następnie w mianowniku skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{7x^2 + 3x + 5} - \sqrt{7x^2 + 5x + 3}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{7x^2 + 3x + 5} + \sqrt{7x^2 + 5x + 3}}{\left(\sqrt{7x^2 + 3x + 5} - \sqrt{7x^2 + 5x + 3} \right) \left(\sqrt{7x^2 + 3x + 5} + \sqrt{7x^2 + 5x + 3} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{7x^2 + 3x + 5} + \sqrt{7x^2 + 5x + 3}}{7x^2 + 3x + 5 - (7x^2 + 5x + 3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{7x^2 + 3x + 5} + \sqrt{7x^2 + 5x + 3}}{x - 2}. \end{aligned}$$

Powyższą granicę obliczymy analogicznie jak w przypadku ciągów. Mamy

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{7x^2 + 3x + 5} + \sqrt{7x^2 + 2x + 3}}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(7 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2 \left(7 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(\sqrt{7 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{7 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}\right)}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{7 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{7 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}}{1 - \frac{2}{x}} = \\ &= \frac{\sqrt{7 + 0 + 0} + \sqrt{7 + 0 + 0}}{1 - 0} = 2\sqrt{7}.\end{aligned}$$

2. W rozważanym przykładzie przy $x \rightarrow \infty$ otrzymujemy symbol nieoznaczony postaci $[\infty - \infty]$. Aby pozbyć się nieoznaczoności pomnożymy licznik i mianownik przez $(\sqrt{4x^2 + 5} + \sqrt{4x^2 - 3x})$, by móc wykorzystać wzór skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Mamy

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 5} - \sqrt{4x^2 - 3x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 5} - \sqrt{4x^2 - 3x})(\sqrt{4x^2 + 5} + \sqrt{4x^2 - 3x})}{\sqrt{4x^2 + 5} + \sqrt{4x^2 - 3x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5 - (4x^2 - 3x)}{\sqrt{4x^2 + 5} + \sqrt{4x^2 - 3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1 - 4x^2 + 3x}{\sqrt{4x^2 + 5} + \sqrt{4x^2 - 3x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(\frac{1}{x} + 3\right)}{x \left(\sqrt{4 + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{4 - \frac{3}{x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + 3}{\sqrt{4 + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{4 - \frac{3}{x}}} = \frac{0 + 3}{\sqrt{4 + 0} + \sqrt{4 - 0}} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

3. Wstawiając $x = 2$ do licznika i mianownika otrzymujemy $\frac{0}{0}$. W pierwszym kroku obliczania rozłożymy licznik na czynniki, wykorzystując wzory na pierwiastki funkcji kwadratowej. Mamy $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$. Następny krok, to pomnożenie licznika i mianownika przez $(\sqrt{4x + 1} + \sqrt{11 - x})$, tak byśmy mogli w mianowniku wykorzystać wzór skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Mamy

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{11-x}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{11-x}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3) \left(\sqrt{4x+1} + \sqrt{11-x} \right)}{\left(\sqrt{4x+1} - \sqrt{11-x} \right) \left(\sqrt{4x+1} + \sqrt{11-x} \right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3) \left(\sqrt{4x+1} + \sqrt{11-x} \right)}{4x+1 - (11-x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3) \left(\sqrt{4x+1} + \sqrt{11-x} \right)}{4x+1-11+x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3) \left(\sqrt{4x+1} + \sqrt{11-x} \right)}{5x-10} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3) \left(\sqrt{4x+1} + \sqrt{11-x} \right)}{5(x-2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3) \left(\sqrt{4x+1} + \sqrt{11-x} \right)}{5} = \\
 &= \frac{(2+3) \left(\sqrt{4 \cdot 2 + 1} + \sqrt{11-2} \right)}{5} = \frac{5 \cdot (3+3)}{5} = 6.
 \end{aligned}$$

4. Wstawiając $x = 4$ do licznika i mianownika, to otrzymamy $\frac{0}{0}$. Stosując w liczniku wzór skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$; otrzymujemy $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$. Mnożąc licznik i mianownik przez $(\sqrt{x+5} + 3)$ w mianowniku otrzymamy wzór skróconego mnożenia. Mamy

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x+5} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{\sqrt{x+5} - 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4) \left(\sqrt{x+5} + 3 \right)}{\left(\sqrt{x+5} - 3 \right) \left(\sqrt{x+5} + 3 \right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4) \left(\sqrt{x+5} + 3 \right)}{x+5-9} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4) \left(\sqrt{x+5} + 3 \right)}{x-4} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) \left(\sqrt{x+5} + 3 \right) = (4+4) \left(\sqrt{4+5} + 3 \right) = 8 \cdot 6 = 48.
 \end{aligned}$$

5. Wstawiając $x = 4$ do licznika i mianownika otrzymujemy $\frac{0}{0}$. Spróbujemy przekształcić tak wyrażenia w liczniku i mianowniku, by móc skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. W tym celu rozszerzymy wyrażenie przez $(\sqrt{2x+1} + \sqrt{13-x})$ oraz przez $(\sqrt{x+5} + \sqrt{3x-3})$. Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{13-x}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{3x-3}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x+1} - \sqrt{13-x}) \cdot (\sqrt{2x+1} + \sqrt{13-x}) \cdot (\sqrt{x+5} + \sqrt{3x-3})}{(\sqrt{x+5} - \sqrt{3x-3}) \cdot (\sqrt{2x+1} + \sqrt{13-x}) \cdot (\sqrt{x+5} + \sqrt{3x-3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x+1-13+x) \cdot (\sqrt{x+5} + \sqrt{3x-3})}{(x+5-3x+3) (\sqrt{2x+1} + \sqrt{13-x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3x-12) \cdot (\sqrt{x+5} + \sqrt{3x-3})}{(-2x+8) (\sqrt{2x+1} + \sqrt{13-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(x-4) \cdot (\sqrt{x+5} + \sqrt{3x-3})}{-2(x-4) (\sqrt{2x+1} + \sqrt{13-x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 \cdot (\sqrt{x+5} + \sqrt{3x-3})}{-2 \cdot (\sqrt{2x+1} + \sqrt{13-x})} = \\ &= \frac{3 \cdot (\sqrt{4+5} + \sqrt{12-3})}{-2 \cdot (\sqrt{8+1} + \sqrt{13-3})} = \frac{18}{-6} = -3. \end{aligned}$$

W rozwiązaniu przykładu 9 będą użyteczne następujące dwa twierdzenia:

Twierdzenie 2. (o granicach funkcji z liczbą e) Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ lub $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e.$$

Twierdzenie 3. (o granicy funkcji z trygonometryczną funkcją $\sin x$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Mażna także podać uogólnienie twierdzenia. 3 Mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

Przykład 9. Oblicz granice funkcji:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{5x+1}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+4}{2x^2+1} \right)^{5x+2}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2+5}{4x^2+3} \right)^{5x^3+2}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-4}{7x+3} \right)^{5x^2}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x},$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{5x+4}-2},$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 8x}{\sin 7x^2}$

Rozwiązanie:

1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{5x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2-6}{3x+2} \right)^{5x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+2} + \frac{-6}{3x+2} \right)^{5x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{3x+2} \right)^{5x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x+2}{-6}} \right)^{5x+1} \end{aligned}$$

Dla $f(x) = \frac{3x+2}{-6}$ mamy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$. Zatem wykorzystując Twierdzenie 2 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{5x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3x+2}{-6}} \right)^{\frac{3x+2}{-6}} \right]^{\frac{-6}{3x+2} \cdot (5x+1)} = e \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6(5x+1)}{3x+2} = \\ &= e \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-30x-6}{3x+2} = e^{-10}, \end{aligned}$$

bo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-30x - 6}{3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(-30 - \frac{6}{x} \right)}{x \left(3 + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-30 - \frac{6}{x}}{3 + \frac{2}{x}} = \frac{-30 - 0}{3 + 0} = -10.$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 4}{2x^2 + 1} \right)^{5x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1 + 3}{2x^2 + 1} \right)^{5x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 + 1} + \frac{3}{2x^2 + 1} \right)^{5x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2x^2 + 1} \right)^{5x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x^2 + 1}{3}} \right)^{5x+1} \end{aligned}$$

Dla $f(x) = \frac{2x^2+1}{3}$ mamy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Zatem wykorzystując Twierdzenie 2 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 4}{2x^2 + 1} \right)^{5x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2x^2 + 1}{3}} \right)^{\frac{2x^2 + 1}{3}} \right]^{\frac{3}{2x^2 + 1} \cdot (5x+1)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(5x+1)}{2x^2 + 1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x+3}{2x^2 + 1}} = e^0 = 1, \end{aligned}$$

bo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x + 3}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(\frac{15}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{15}{x} + \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0.$$

3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 5}{4x^2 + 3} \right)^{5x^3+2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 3 + 2}{4x^2 + 3} \right)^{5x^3+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 3}{4x^2 + 3} + \frac{2}{4x^2 + 3} \right)^{5x^3+2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{4x^2 + 3} \right)^{5x^3+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{4x^2 + 3}{2}} \right)^{5x^3+2} \end{aligned}$$

Dla $f(x) = \frac{4x^2+3}{2}$ mamy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Zatem wykorzystując Twierdzenie 2 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2+5}{4x^2+3} \right)^{5x^3+2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{4x^2+3}{2}} \right)^{\frac{4x^2+3}{2}} \right]^{\frac{2}{4x^2+3} \cdot (5x^3+2)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(5x^3+2)}{4x^2+3}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3+4}{4x^2+3}} = e^{\infty} = \infty, \end{aligned}$$

bo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3+4}{4x^2+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(10x + \frac{4}{x^2} \right)}{x^2 \left(4 + \frac{3}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x + \frac{4}{x^2}}{4 + \frac{3}{x^2}} = \frac{\infty + 0}{4 + 0} = \infty.$$

4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-4}{7x+3} \right)^{5x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+3-7}{7x+3} \right)^{5x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+3}{7x+3} + \frac{-7}{7x+3} \right)^{5x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-7}{7x+3} \right)^{5x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{7x+3}{-7}} \right)^{5x^2} \end{aligned}$$

Dla $f(x) = \frac{7x+3}{-7}$ mamy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$. Zatem wykorzystując Twierdzenie 2 otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-4}{7x+3} \right)^{5x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{7x+3}{-7}} \right)^{\frac{7x+3}{-7}} \right]^{\frac{-7}{7x+3} \cdot (5x^2)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-35x^2}{7x+3}} = e^{-\infty} = 0,$$

bo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-35x^2}{7x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-35x^2}{x \left(7 + \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-35x}{7 + \frac{3}{x}} = \frac{-\infty}{7+0} = -\infty.$$

5. Zauważmy, że wstawiając $x = 0$ otrzymujemy symbol nieoznaczony $\left[\frac{0}{0} \right]$. Sróbuujemy

tak przekształcić to wyrażenie nieoznaczone, by móc skorzystać z uogólnienia Twierdzenia 3. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x \cdot \frac{\sin 7x}{7x}}{3x},$$

Następnie korzystając z uogólnionej wersji Twierdzenia 3 mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1,$$

a zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{3x} = \frac{7}{3}.$$

6. Podstawiając w tym przykładzie $x = 0$ otrzymujemy symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$. Pierwszym krokiem będzie zastosowanie metody wykorzystywanej w poprzednich przykładach tzn rozszerzenie ułamka o wyrażenie $\sqrt{5x+4}+2$, tak byśmy mogli wykorzystać wzór skróconego mnożenia: $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$. Mamy :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{5x+4}-2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\sqrt{5x+4}+2)}{(\sqrt{5x+4}-2) \cdot (\sqrt{5x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\sqrt{5x+4}+2)}{5x+4-2^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\sqrt{5x+4}+2)}{5x}, \end{aligned}$$

Korzystając z powyższych przekształceń i z Twierdzenia 3 otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{5x+4}-2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{5x+4}+2)}{5} = \frac{2+2}{5} = \frac{4}{5}.$$



7. Wstawiając $x = 0$ otrzymujemy symbol nieoznaczony $\left[\frac{0}{0}\right]$. W obliczeniach tej granicy będziemy korzystać z uogólnionej wersji Twierdzenia 3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 8x}{\sin 7x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{8x \sin 8x}{8x} \cdot \frac{8x \sin 8x}{8x}}{\frac{7x^2 \cdot \sin 7x^2}{7x^2}}$$

Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{8x} = 1 \quad \text{ i } \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x^2}{7x^2} = 1$$

zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 8x}{\sin 7x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{64x^2}{7x^2} = \frac{64}{7}.$$



Pochodna i różniczka funkcji

Niech f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 . Przyjmijmy oznaczenia:

- $\Delta x = x_1 - x_0$ - przyrost argumentu w x_0 ,
- $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$ - przyrost wartości funkcji f w x_0 odpowiadający przyrostowi argumentu Δx ,
- $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ - iloraz różnicowy funkcji f w x_0 odpowiadający przyrostowi argumentu Δx .

Uwaga Iloraz różnicowy funkcji f w x_0 jest współczynnikiem kierunkowym prostej, zwanej sieczną, przechodzącej przez punkty $A((x_0), f(x_0))$ i $B((x_1), f(x_1))$ należące do wykresu funkcji f . Równanie siecznej jest postaci

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Definicja 1. Pochodną (pierwszego rzędu) funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

o ile istnieje i jest skończona i oznaczamy ją $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Przykład 10. Korzystając z definicji pochodnej funkcji obliczyć pochodne następujących funkcji:

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$;
2. $f(x) = x^4$;
3. $f(x) = \frac{1}{x+5}$;
4. $f(x) = \cos x$.

Rozwiązanie:

1. Weźmy dowolnie ustalone x_0 i $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Korzystając z definicji 1 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}) \cdot (\sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x_0} \cdot \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} + \sqrt[3]{x_0^2})}{\Delta x \cdot (\sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x_0} \cdot \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} + \sqrt[3]{x_0^2})} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x \cdot (\sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x_0} \cdot \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} + \sqrt[3]{x_0^2})} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot (\sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x_0} \cdot \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} + \sqrt[3]{x_0^2})} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x_0} \cdot \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} + \sqrt[3]{x_0^2})} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}.
 \end{aligned}$$

Z dowolności wyboru x_0 wynika, że dla $x_0 \neq 0$ mamy:

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

2. Ustalmy dowolne x_0 i weźmy $f(x) = x^4$. Korzystając z definicji 1 otrzymujemy

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^4 - x_0^4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{((x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2) \cdot ((x_0 + \Delta x)^2 + x_0^2)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{((x_0 + \Delta x) - x_0) \cdot ((x_0 + \Delta x) + x_0) \cdot ((x_0 + \Delta x)^2 + x_0^2)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot (2x_0 + \Delta x) \cdot ((x_0 + \Delta x)^2 + x_0^2)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) \cdot ((x_0 + \Delta x)^2 + x_0^2) = 2x_0 \cdot 2(x_0)^2 = 4x_0^3. \end{aligned}$$

Z dowolności wyboru x_0 wynika, że

$$(x^4)' = 4x^3.$$

3. Niech x_0 będzie dowolnie ustalone, $x_0 \neq -5$ i $f(x) = \frac{1}{x+5}$. Korzystając z definicji 1 otrzymujemy

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x_0 + \Delta x + 5} - \frac{1}{x_0 + 5}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x_0 + 5 - x_0 - \Delta x - 5}{(x_0 + \Delta x + 5) \cdot (x_0 + 5)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{(x_0 + \Delta x + 5) \cdot (x_0 + 5)} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x_0 + \Delta x + 5) \cdot (x_0 + 5)} = \frac{-1}{(x_0 + 5)^2}. \end{aligned}$$

Z dowolności wyboru x_0 wynika, że

$$\left(\frac{1}{x+5} \right)' = \frac{1}{(x+5)^2}.$$

4. Niech x_0 będzie dowolnie ustalone i $f(x) = \cos x$. Korzystając z definicji 1 otrzymujemy

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0 + \Delta x) - \cos(x_0)}{\Delta x}.$$

Korzystając ze wzoru:

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \left(\frac{x-y}{2} \right) \sin \left(\frac{x+y}{2} \right),$$

otrzymujemy

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \left(\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \right) \sin \left(\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\sin \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \sin \left(\frac{2x_0 + \Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Uwzględniając twierdzenie 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

otrzymujemy:

$$f'(x_0) = -\sin(x_0)$$

Z dowolności wyboru x_0 wynika, że

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Definicja 2. Jeśli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie zbioru D , to mówimy, że f ma pochodną (pierwszego rzędu) w zbiorze D . Funkcję

$$D \ni x_0 \rightarrow f'(x_0)$$

nazywamy **pochodną funkcji f w zbiorze D** i oznaczamy ją f' lub $\frac{df}{dx}$.

$f(x)$	$f'(x)$	uwagi	$f(x)$	$f'(x)$	uwagi
c	0		a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
x^p	px^{p-1}	$p \neq 0$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$		$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	

Tabela 1. Tablica pochodnych

Ponadto, w szczególnych przypadkach, mamy

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	e^x	$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Tabela 2. Tablica pochodnych - szczególne przypadki

Twierdzenie 4. Jeśli f, g są różniczkowalne w x , to funkcje $f + g, f - g, f \cdot g, f/g$ (o ile $g(x) \neq 0$) też są różniczkowalne w x i zachodzą wzory

- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
- $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$
- $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Przykład 11. Na podstawie wzorów przedstawionych w Twierdzeniu 4 i Tabeli 1 obliczyć pochodne następujących funkcji:

- $f(x) = x^8 + 2x^5 + \frac{3}{x^4} + \sqrt[7]{x},$
- $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^3 - 10x + 2 \sin x + e^x$
- $f(x) = 3^x + \ln x + 3 \arccos x + \sqrt[5]{x^7}$
- $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x,$

- $f(x) = (4x^3 - \sqrt{5x}) \left(x^5 - \frac{4}{x^2} - 2\sqrt[5]{x^6}\right),$
- $f(x) = 5^x \left(7x^4 - \frac{x^3}{5}\right),$
- $f(x) = \frac{e^x + \operatorname{tg} x}{7x + 4 \ln x},$



$$8. f(x) = \frac{x^7 - x^3 - 5}{x^3 + 4x^2 + 1},$$

$$9. f(x) = \frac{x^2 \cdot \arcsin x}{\operatorname{ctg} x},$$

$$10. f(x) = \frac{x^5 - e^x}{x^2 \cdot \ln x},$$

Rozwiązanie:

1. Uwzględniając Twierdzenie 4 punkt 1 oraz własności funkcji potęgowej mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^8 + 2x^5 + \frac{3}{x^4} + \sqrt[7]{x} \right)' = (x^8)' + 2(x^5)' - 3(x^{-4})' + \left(x^{\frac{1}{7}} \right)' = \\ &= 8x^7 + 2 \cdot 5x^4 - 3 \cdot (-4)x^{-5} + \frac{1}{7} \cdot x^{\frac{1}{7}-1} = 8x^7 + 10x^4 + \frac{12}{x^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[7]{x^6}}. \end{aligned}$$

2. Uwzględniając Twierdzenie 4 punkt 1 oraz własności funkcji potęgowej mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{5}x^5 + x^3 - 10x + 2 \sin x + e^x \right)' = \left(\frac{1}{5}x^5 \right)' + (x^3)' - 10(x)' + 2(\sin x)' + (e^x)' = \\ &= x^4 + 3x^2 - 10 + 2 \cos x + e^x. \end{aligned}$$

3. Uwzględniając Twierdzenie 4 punkt 1 mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(3^x + \ln x + 3 \arccos x + \sqrt[5]{x^7} \right)' = (3^x)' + (\ln x)' - (3 \arccos x)' + \left(x^{\frac{7}{5}} \right)' = \\ &= 3^x \ln 3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}. \end{aligned}$$

4. Uwzględniając Twierdzenie 4 punkt 4 mamy:

$$f'(x) = (\cos x \cdot \arctg x)' = (\cos x)' \cdot \arctg x + \cos x (\arctg x)' = -\sin x \cdot \arctg x + \cos x \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$



5. Uwzględniając Twierdzenie 4 punkt 4 i własności funkcji potęgowej mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((4x^3 - \sqrt{5x}) \cdot \left(x^5 - \frac{4}{x^2} - 2\sqrt[5]{x^6} \right) \right)' = \\ &= (4x^3 - \sqrt{5} \cdot \sqrt{x})' \cdot \left(x^5 - \frac{4}{x^2} - 2\sqrt[5]{x^6} \right) + (4x^3 - \sqrt{5x}) \cdot \left(x^5 - 4x^{-2} - 2x^{\frac{6}{5}} \right)' = \\ &= (4 \cdot 3x^2 - \sqrt{5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}) \cdot \left(x^5 - \frac{4}{x^2} - 2\sqrt[5]{x^6} \right) + (4x^3 - \sqrt{5x}) \cdot \left(5x^4 + 8x^{-3} - 2 \cdot \frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}} \right) = \\ &= \left(12x^2 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} \right) \cdot \left(x^5 - \frac{4}{x^2} - 2\sqrt[5]{x^6} \right) + (4x^3 - \sqrt{5x}) \cdot \left(5x^4 + \frac{8}{x^3} - \frac{12}{5}\sqrt[5]{x} \right). \end{aligned}$$

6. Uwzględniając Twierdzenie 4 punkt 4 mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(5^x \left(7x^4 - \frac{x^3}{5} \right) \right)' = (5^x)' \cdot \left(7x^4 - \frac{x^3}{5} \right) + (5^x) \cdot \left(7x^4 - \frac{x^3}{5} \right)' = \\ &= (5^x \ln 5) \cdot \left(7x^4 - \frac{x^3}{5} \right) + (5^x) \cdot \left(28x^3 - \frac{3x^2}{5} \right). \end{aligned}$$

7. Uwzględniając Twierdzenie 4 punkt 5 mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^x + \operatorname{tg} x}{7^x + 4 \ln x} \right)' = \frac{(e^x + \operatorname{tg} x)' \cdot (7^x + 4 \ln x) - (e^x + \operatorname{tg} x) \cdot (7^x + 4 \ln x)'}{(7^x + 4 \ln x)^2} = \\ &= \frac{\left(e^x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) \cdot (7^x + 4 \ln x) - (e^x + \operatorname{tg} x) \cdot \left(7^x \ln 7 + \frac{4}{x} \right)}{(7^x + 4 \ln x)^2} \end{aligned}$$

8. Uwzględniając Twierdzenie 4 punkt 5 mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^7 - x^3 - 5}{x^3 + 4x^2 + 1} \right)' = \frac{(x^7 - x^3 - 5)' \cdot (x^3 + 4x^2 + 1) - (x^7 - x^3 - 5) \cdot (x^3 + 4x^2 + 1)'}{(x^3 + 4x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{(7x^6 - 3x^2) \cdot (x^3 + 4x^2 + 1) - (x^7 + 4x^2 - 5) \cdot (3x^2 + 8x)}{(x^3 + 4x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

9. Uwzględniając Twierdzenie 4 punkt 5, a następnie punkt 4, mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x \cdot \arcsin x}{\operatorname{ctg} x} \right)' = \frac{(x \cdot \arcsin x)' \cdot (\operatorname{ctg} x) - (x \cdot \arcsin x) \cdot (\operatorname{ctg} x)'}{(\operatorname{ctg} x)^2} = \\ &= \frac{(x' \cdot \arcsin x + x(\arcsin x)') \cdot (\operatorname{ctg} x) - (x \arcsin x) \cdot \left(\frac{-1}{\sin^2 x} \right)}{(\operatorname{ctg} x)^2} = \\ &= \frac{\left(1 \cdot \arcsin x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \cdot (\operatorname{ctg} x) - (x \arcsin x) \cdot \left(\frac{-1}{\sin^2 x} \right)}{(\operatorname{ctg} x)^2} = \\ &= \frac{\left(\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \cdot (\operatorname{ctg} x) - (x \arcsin x) \cdot \left(\frac{-1}{\sin^2 x} \right)}{(\operatorname{ctg} x)^2} \end{aligned}$$

10. Uwzględniając Twierdzenie 4 punkt 5, a następnie punkt 4, mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^5 - e^x}{x^2 \cdot \ln x} \right)' = \frac{(x^5 - e^x)' \cdot (x^2 \cdot \ln x) - (x^5 - e^x) \cdot (x^2 \cdot \ln x)'}{(x^2 \cdot \ln x)^2} = \\ &= \frac{(5x^4 - e^x) \cdot (x^2 \ln x) - (x^5 - e^x) \cdot ((x^2)' \ln x + x \cdot (\ln x)')}{(x^2 \cdot \ln x)^2} = \\ &= \frac{(5x^4 - e^x) \cdot (x^2 \ln x) - (x^5 - e^x) \cdot (2x \cdot \ln x + x^2 \cdot (\frac{1}{x}))}{(x^2 \cdot \ln x)^2} = \\ &= \frac{(5x^4 - e^x) \cdot (x^2 \ln x) - (x^4 - e^x) \cdot (2x \ln x + x)}{(x^2 \cdot \ln x)^2}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 5. Jeśli $f(x)$ jest różniczkowalna w x_0 oraz $g(y)$ jest różniczkowalna w $y_0 = f(x_0)$, to funkcja $h = g \circ f$ też jest różniczkowalna w x_0 i zachodzi wzór

$$h'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Uwaga: Powyższą zasadę różniczkowania funkcji złożonej można przenieść na przypadek złożenia 3 i więcej funkcji.

Przykład 12. Na podstawie wzorów przedstawionych w Twierdzeniach 4 i 5 obliczyć pochodne następujących funkcji:

1. $f(x) = \operatorname{ctg}(2 + x^3 + x^{10}),$

2. $f(x) = \arctg(10x),$

3. $f(x) = (7x^6 + 2 \cos x)^8$

4. $f(x) = (3x^5 + 4x^2 + 3^x)^4,$

5. $f(x) = \arccos(\operatorname{tg} x)$

6. $f(x) = \operatorname{tg}(\arccos x)$

7. $f(x) = 4^{\arcsin x}$

8. $f(x) = \sin x^7$

9. $f(x) = \sin^7 x$

10. $f(x) = (3x + 5)^4(x^7 + 4x^4 + 2)^5,$

11. $f(x) = x^5 \cdot \ln(x + x^4)$

12. $f(x) = \frac{1 + \cos 5x}{x^3 - \sin 4x}$

13. $f(x) = \arctg(5x^2 - e^x),$

14. $f(x) = \cos\left(\frac{4x^2 - 4x + 2^x}{7 - 3x^3 + x^5}\right),$

15. $f(x) = \ln \sin(x^5 + 2x^3 + 2)$

16. $f(x) = \frac{\ln(\sqrt[5]{x})}{\arctg \frac{5}{x^3}}.$

Rozwiązanie:

1. Zauważmy, że w przykładzie tym rolę funkcji zewnętrznej pełni funkcja cotangens, funkcją wewnętrzną jest wielomian stopnia dziesiątego. Uwzględniając wzory z tablicy 1, twierdzenie 5 mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\operatorname{ctg}(2 + x^3 + x^{10}) \right)' = \frac{-1}{\sin^2(2 + x^3 + x^{10})} \cdot (2 + x^3 + x^{10})' = \\ &= \frac{-1}{\sin^2(2 + x^3 + x^{10})} \cdot (3x^2 + 10x^9) = \frac{-x^2(3 + 10x^7)}{\sin^2(2 + x^3 + x^{10})}. \end{aligned}$$

2. Zauważmy, że w przykładzie tym rolę funkcji zewnętrznej pełni funkcja cyklometryczna arcustangens, funkcją wewnętrzną jest funkcja liniowa. Uwzględniając wzory z tablicy 1, twierdzenie 5 mamy

$$f'(x) = (\arctg(10x))' = \frac{1}{1 + (10x)^2} \cdot (10x)' = \frac{1}{1 + 100x^2} \cdot 10 = \frac{10}{1 + 100x^2}.$$

3. Zauważmy, że w przykładzie tym rolę funkcji zewnętrznej pełni funkcja potęgowa o

wykładniku 8, zaś funkcją wewnętrzną jest suma wielomian stopnia szóstego i funkcji trygonometrycznej cosinus. Uwzględniając wzory z tablicy 1, twierdzenie 5 mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((7x^6 + 2 \cos x)^8 \right)' = 8 \cdot (7x^6 + 2 \cos x)^7 \cdot (7x^6 + 2 \cos x)' = \\ &= 8 \cdot (7x^6 + 2 \cos x)^7 \cdot (42x^5 - 2 \sin x) \end{aligned}$$

4. Zauważmy, że w przykładzie tym rolę funkcji zewnętrznej pełni funkcja potęgowa stopnia 4, zaś funkcją wewnętrzną jest suma wielomianu stopnia piątego i funkcji wykładniczej.. Uwzględniając wzory z tablicy 1,2 twierdzenie 5 mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((3x^5 + 4x^2 + 3^x)^4 \right)' = 4 \cdot (3x^5 + 4x^2 + 3^x)^3 \cdot (3x^5 + 4x^2 + 3^x)' = \\ &= 4 (3x^5 + 4x^2 + 3^x)^3 \cdot (15x^4 + 8x + 3^x \ln 3). \end{aligned}$$

5. Zauważmy, że w przykładzie tym rolę funkcji zewnętrznej pełni funkcja cyklometryczna arcus cosinus, funkcją wewnętrzną jest funkcja tangens. Uwzględniając wzory z tablicy 1, twierdzenie 5 mamy

$$f'(x) = (\arccos(\operatorname{tg} x))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (\operatorname{tg} x)^2}} \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\operatorname{tg} x)^2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

6. Zauważmy, że w przykładzie tym rolę funkcji zewnętrznej pełni funkcja tangens, funkcją wewnętrzną jest arcus cosinus. Uwzględniając wzory z tablicy 1, twierdzenie 5 mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{tg} (\arccos x))' = \frac{1}{\cos^2(\arccos x)} \cdot (\arccos x)' = \\ &= \frac{1}{(\cos(\arccos x))^2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

7. Zauważmy, że w przykładzie tym rolę funkcji zewnętrznej pełni funkcja wykładnicza o podstawie 4, zaś funkcją wewnętrzną jest funkcja cyklotryczna arcus sinus. Uwzględniając wzory z tablicy 1, 2 twierdzenie 5 mamy

$$f'(x) = \left(4^{\arcsin x}\right)' = 4^{\arcsin x} \ln 4 \cdot (\arcsin x)' = 4^{\arcsin x} \ln 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

8. Zauważmy, że w przykładzie tym rolę funkcji zewnętrznej pełni funkcja cosinus, funkcją wewnętrzną jest funkcja potęgowa o wykładniku 7. Uwzględniając wzory z tablicy 1, twierdzenie 5 mamy

$$f'(x) = \left(\sin x^7\right)' = (\cos x^7) \cdot (x^7)' = (\cos x^7) \cdot (7x^6).$$

9. Przykład ten jest nieco podobny do poprzedniego. Zauważmy, jednak że w przykładzie tym rolę funkcji zewnętrznej pełni funkcja potęgowa o wykładniku 7, funkcją wewnętrzną jest trygonometryczna sinus. Wynika to z faktu że:

$$\sin^7 x = (\sin x)^7.$$

Uwzględniając wzory z tablicy 1, twierdzenie 5 mamy

$$f'(x) = \left((\sin x)^7\right)' = 7(\sin x)^6 \cdot (\sin x)' = 7(\sin x)^6 \cdot (\cos x).$$

10. Zauważmy, że w przykładzie tym mamy doczynienia z iloczynem dwóch funkcji złożonych. Uwzględniając wzory z tablicy 1, twierdzenie 4 punkt 4 i twierdzenie 5

mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((3x+5)^4 \cdot (x^7+4x^4+2)^5 \right)' = \left((3x+5)^4 \right)' \cdot (x^7+4x^4+2)^5 + \\ &+ (3x+5)^4 \cdot \left((x^7+4x^4+2)^5 \right)' = 4(3x+5)^3 \cdot (3x+5)' \cdot (x^7+4x^4+2)^5 + \\ &+ (3x+5)^4 \cdot \left(5(x^7+4x^4+2)^4 \right) \cdot (x^7+4x^4+2)' = \\ &= 4(3x+5)^3 \cdot 3 \cdot (x^7+4x^4+2)^5 + (3x+5)^4 \cdot \left(5(x^7+4x^4+2)^4 \right) \cdot (7x^6+16x). \end{aligned}$$

11. Zauważmy, że w przykładzie tym mamy doczynienia także z iloczynem dwóch funkcji: funkcji liniowej i funkcji złożonej, gdzie funkcją zewnętrzną jest funkcja logarytmiczna.

Uwzględniając wzory z tablicy 1, twierdzenie 4 punkt 4 i twierdzenie 5 mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^5 \cdot \ln(x+x^4) \right)' = \left(x^5 \right)' \cdot \ln(x+x^4) + x^5 \cdot \left(\ln(x+x^4) \right)' = \\ &= 5x^4 \cdot \ln(x+x^4) + x^5 \cdot \frac{1}{x+x^4} \cdot (x+x^4)' = \\ &= 5x^4 \cdot \ln(x+x^4) + \frac{x^5}{x(1+x^3)} \cdot (1+4x^3) = \\ &= 5x^4 \ln(x+x^4) + \frac{x^4(1+4x^3)}{1+x^3}. \end{aligned}$$

12. W przykładzie tym mamy doczynienia z ilorazem dwóch funkcji złożonych. Uwzględniając wzory z tablicy 1, twierdzenie 4 punkt 5 i twierdzenie 5 mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1+\cos 5x}{x^3-\sin 4x} \right)' = \frac{(1+\cos 5x)' \cdot (x^3-\sin 4x) - (1+\cos 5x) \cdot (x^3-\sin 4x)'}{(x^3-\sin 4x)^2} = \\ &= \frac{(-\sin 5x) \cdot (5x)' \cdot (x^3-\sin 4x) - (1+\cos 5x) \cdot (3x^2-\cos 4x \cdot (4x)')}{(x^3-\sin 4x)^2} = \\ &= \frac{(-5\sin 5x) \cdot (x^3-\sin 4x) - (1+\cos 5x) \cdot (3x^2-4\cos 4x)}{(x^3-\sin 4x)^2}. \end{aligned}$$

13. W przykładzie tym mamy doczynienia ze złożeniem funkcji cyklotrycznej arcus cotangens z różnicą dwóch funkcji elementarnych. Uwzględniając wzory z tablicy 1,

twierdzenie 4 punkt 2 i twierdzenie 5 mamy

$$f'(x) = \left(\arctg(5x^2 - e^x) \right)' = \frac{-1}{1 + (5x^2 - e^x)^2} \cdot (5x^2 - e^x)' = \frac{1}{1 + (5x^2 - e^x)^2} \cdot (10x - e^x).$$

14. W przykładzie tym mamy doczynienia ze złożeniem funkcji trygonometrycznej cosinus z funkcją wymierną. Uwzględniając wzory z tablicy 1, twierdzenie 4 punkt 5 i twierdzenie 5 mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\cos \left(\frac{4x^2 - 4x + 2^x}{7 - 3x^3 + x^5} \right) \right)' = \left(-\sin \left(\frac{4x^2 - 4x + 2^x}{7 - 3x^3 + x^5} \right) \right)' \cdot \left(\frac{4x^2 - 4x + 2^x}{7 - 3x^3 + x^5} \right)' = \\ &= \left(-\sin \left(\frac{4x^2 - 4x + 2^x}{7 - 3x^3 + x^5} \right) \right) \cdot \left[\frac{(4x^2 - 4x + 2^x)' \cdot (7 - 3x^3 + x^5)}{(7 - 3x^3 + x^5)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(4x^2 - 4x + 2^x) \cdot (7 - 3x^3 + x^5)'}{(7 - 3x^3 + x^5)^2} \right] = \\ &= \left(-\sin \left(\frac{4x^2 - 4x + 2^x}{7 - 3x^3 + x^5} \right) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{(8x - 4 + 2^x \ln 2) \cdot (7 - 3x^3 + x^5) - (4x^2 - 4x + 2^x) \cdot (-9x^2 + 5x^4)}{(7 - 3x^3 + x^5)^2}. \end{aligned}$$

15. Przykład ten jest nieco inny niż poprzednie. W tym przykładzie zostały złożone trzy funkcje: logarytmiczna, trygonometryczna - sinus i wielomian stopnia trzeciego. Uwzględniając wzory z tablicy 1 2, twierdzenie 4 punkt 1 oraz twierdzenie 5 mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln \left(\sin \left(x^5 + 2x^3 + 2 \right) \right) \right)' = \frac{1}{\sin \left(x^5 + 2x^3 + 2 \right)} \cdot \left(\sin \left(x^5 + 2x^3 + 2 \right) \right)' = \\ &= \frac{1}{\sin \left(x^5 + 2x^3 + 2 \right)} \cdot \left(\cos \left(x^5 + 2x^3 + 2 \right) \right) \cdot \left(x^5 + 2x^3 + 2 \right)' = \\ &= \frac{\cos \left(x^5 + 2x^3 + 2 \right)}{\sin \left(x^5 + 3x^3 + 2 \right)} \cdot (5x^4 + 6x^2) = (5x^4 + 6x^2) \operatorname{ctg} \left(x^5 + 2x^3 + 2 \right). \end{aligned}$$

16. W przykładzie tym w celu ułatwienia obliczania pochodnej użyjemy pewnych

własności funkcji logarytmicznej. Uwzględniając wzory z tablicy 1 2, twierdzenie 4 punkt 5 oraz twierdzenie 5 mamy

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{\ln \sqrt[5]{x}}{\arctg \frac{5}{x^3}} \right)' = \left(\frac{\frac{1}{5} \ln x}{\arctg \frac{5}{x^3}} \right)' = \frac{\left(\frac{1}{5} \ln x \right)' \cdot \arctg \frac{5}{x^3} - \frac{1}{5} \ln x \cdot \left(\arctg \frac{5}{x^3} \right)'}{\left(\arctg \frac{5}{x^3} \right)^2} = \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot \arctg \frac{5}{x^3} - \frac{1}{5} \ln x \cdot \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{5}{x^3} \right)^2} \right) \cdot (5x^{-3})'}{\left(\arctg \frac{5}{x^3} \right)^2} = \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{5x} \right) \cdot \arctg \frac{5}{x^3} + \frac{1}{5} \ln x \cdot \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{5}{x^3} \right)^2} \right) \cdot \left(\frac{-15}{x^4} \right)}{\left(\arctg \frac{5}{x^3} \right)^2} = \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{5x} \right) \cdot \arctg \frac{5}{x^3} + \left(\frac{-3 \ln x}{x^4 (1 + \left(\frac{5}{x^3} \right)^2)} \right)}{\left(\arctg \frac{5}{x^3} \right)^2}.
 \end{aligned}$$

Przykład 13. Oblicz pochodną funkcji $F(x) = (\sin x)^{\cos x}$.

Rozwiązanie: Mamy

$$\begin{aligned}
 \ln F(x) &= \ln(\sin x)^{\cos x} = \cos x \cdot \ln(\sin x) \\
 [\ln F(x)]' &= [\cos x \cdot \ln(\sin x)]' \\
 \frac{F'(x)}{F(x)} &= (-\sin x) \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \\
 F'(x) &= F(x) \left[(-\sin x) \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right].
 \end{aligned}$$

Przykład 14. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = \log_{(x^3+2x)} \cos x$.

Rozwiązanie: Stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu mamy:

$$\log_{(x^3+2x)} \cos x = \frac{\ln(\cos x)}{\ln(x^3 + 2x)}.$$

Obliczając pochodną przekształconej funkcji mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln(\cos x)}{\ln(x^3 + 2x)} \right)' = \frac{(\ln(\cos x))' \cdot \ln(x^3 + 2x) - \ln(\cos x) (\ln(x^3 + 2x))'}{(\ln(x^3 + 2x))^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) \cdot \ln(x^3 + 2x) - \ln(\cos x) \cdot \frac{1}{x^3+2x} \cdot (3x^2 + 2)}{(\ln(x^3 + 2x))^2} = \\ &= \frac{-\operatorname{tg} x \cdot \ln(x^3 + 2x) - \frac{(3x^2+2) \ln \cos x}{x^3+2x}}{(\ln(x^3 + 2x))^2} \end{aligned}$$

Zastosowanie pochodnej funkcji.

1. Styczna do wykresu funkcji.

Równanie siecznej przechodzącej przez punkty $A((x_0), f(x_0))$ i $B((x_1), f(x_1))$ jest postaci

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Gdy Δx dąży do 0, to punkt B dąży do A po wykresie funkcji f , zaś sieczna dąży do położenia granicznego, jakim jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie x_0 . Równanie stycznej jest więc postaci

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Pochodna $f'(x_0)$ jest więc współczynnikiem kierunkowym tej stycznej, czyli inaczej mówiąc, tangensem kąta nachylenia tej stycznej do osi Ox .

Przykład 15. Oblicz kąt nachylenia wykresu funkcji $f(x) = e^{3x} - 1$ do osi Ox . Napisz równanie stycznej do tej funkcji w punkcie przecięcia f z osią Ox .

Rozwiązanie: Jedynym rozwiązaniem równania $e^{3x} - 1 = 0$ jest $x_0 = 0$. Oznaczmy $f(x) := e^{3x} - 1$. Mamy $f'(x) = 3e^{3x}$ oraz $f'(0) = 3$. Zatem kąt nachylenia tej stycznej do osi Ox spełnia równość $\tan \alpha = 3$, skąd $\alpha = \arctan 3$. Ponieważ $f(0) = 0$, więc równanie stycznej do wykresu funkcji f w $x_0 = 0$ jest postaci $y = 3x$.

Przykład 16. Napisać równania stycznych do wykresów funkcji we wskazanych punktach:

$$1. f(x) = \frac{4x}{2+x^2}, x_0 = \sqrt{2}$$

$$2. f(x) = \frac{e^{3x}}{1+x^2}, x_0 = 1$$

Rozwiązanie:

$$1. \text{ Niech } f(x) = \frac{4x}{2+x^2} \text{ i } x_0 = \sqrt{2}. \text{ Mamy:}$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}.$$

oraz

$$f'(x) = \frac{4(2+x^2) - 8x^2}{(2+x^2)^2} = \frac{8-4x^2}{(2+x^2)^2}.$$

Stąd

$$f'(\sqrt{2}) = 0.$$

Podstawiając do równania stycznej otrzymujemy

$$y = \sqrt{2}.$$

$$2. \text{ Niech } f(x) = \frac{e^{3x}}{1+x^2} \text{ i } x_0 = 1. \text{ Mamy:}$$

$$f(1) = \frac{e^3}{2}$$

oraz

$$f'(x) = \frac{3e^{3x}(1+x^2) - e^{3x} \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^{3x}(3-2x+3x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Stąd

$$f'(1) = \frac{4e^3}{4} = e^3.$$

Podstawiając do równania stycznej otrzymujemy:

$$y - \frac{e^3}{2} = e^3 \cdot (x - 1),$$

co jest równoważne:

$$y = e^3 x - \frac{e^3}{2}.$$

2. Monotoniczność i ekstrema funkcji.

Twierdzenie 6. Funkcja f , której pochodna jest w całym zbiorze $[a, b]$ dodatnia (ujemna), jest w zbiorze (a, b) rosnąca (malejąca).

Twierdzenie 7. (Fermata, warunek konieczny istnienia ekstremum) Jeśli funkcja f różniczkowalna w x_0 ma w tym punkcie ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$.

Powyższe twierdzenie nie rozstrzyga kwestii istnienia ekstremum lokalnego. Ekstremów lokalnych można poszukiwać tylko w punktach w których pochodna się zeruje. Nazywamy je punktami stacjonarnymi (lub podejrzanymi o istnienie ekstremum). Do punktów stacjonarnych zaliczamy też punkty, w których funkcja jest określona, ale pochodna nie istnieje.

Do rozstrzygnięcia, czy w danym punkcie stacjonarnym rzeczywiście istnieje ekstremum lokalne wykorzystujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8. (warunek wystarczający istnienia ekstremum) Jeśli

1. $f'(x_0) = 0$ lub $f'(x_0)$ nie istnieje

2. pochodna $f'(x)$ zmienia znak w otoczeniu punktu x_0 , tzn

a) $f'(x_0) > 0$ dla $x < x_0$ oraz $f'(x_0) < 0$ dla $x > x_0$ lub

b) $f'(x_0) < 0$ dla $x < x_0$ oraz $f'(x_0) > 0$ dla $x > x_0$,

to funkcja f ma w x_0 ekstremum lokalne właściwe. W przypadku a) jest to maksimum lokalne, w przypadku b) jest to minimum lokalne.

Przykład 17. Wyznacz ekstrema lokalne i zbadaj monotoniczność funkcji

$$1. f(x) = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4$$

$$2. f(x) = x - 3 + \frac{4}{x-5}$$

$$3. f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$$

$$4. f(x) = (3-x)^5(3x+2)^4$$

$$5. f(x) = (x^2 + x + 1)e^{x+2};$$

$$6. f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 4}$$

$$7. f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2};$$

$$8. f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x+1).$$

Rozwiązanie:

1. Niech $f(x) = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4$ Rozważana funkcja jest wielomianem stopnia siódmego, zatem dziedziną tej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Aby wyznaczyć ekstrema funkcji należy policzyć pochodną tej funkcji i wyznaczyć miejsca zerowe pochodnej. Następnym krokiem jest zbadanie znaku pochodnej w otoczeniu miejsc zerowych pochodnej. Mamy

$$f'(x) = x^6 - x^5 - x^4 + x^3.$$

Zatem

$$f'(x) = 0 \iff x^3 \cdot (x^3 - x^2 - x + 1) = 0.$$

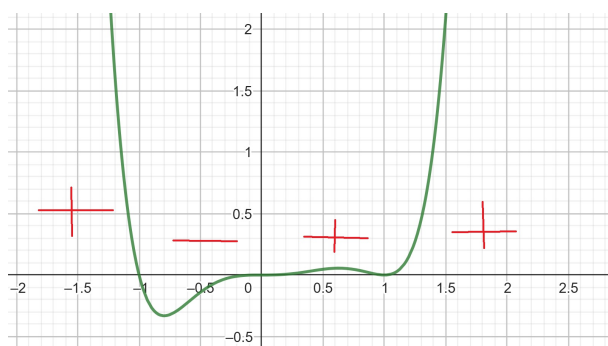
Rozwiązując równanie wielomianowe otrzymujemy $x_1 = 0$ - miejsce zerowe potrójne lub

$$x^2(x-1) - (x-1) = 0,$$

co jest równoważne

$$(x - 1) \cdot (x^2 - 1) = 0 \quad (x - 1)^2 \cdot (x + 1) = 0.$$

Zatem $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Aby ocenić zachowanie pochodnej w otoczeniu jej miejsc zerowych najwygodniej jest narysować wykres pochodnej i odczytać z niego jakie wartości przyjmuje pochodna w otoczeniu swoich miejsc zerowych. Z wykresu



pochodnej mamy:

$$f'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in (-\infty, -1) \quad \text{oraz} \quad x \in (0, +\infty).$$

Zatem w przedziałach tych funkcja rośnie. Analogicznie

$$f'(x) < 0 \quad \text{dla} \quad x \in (-1, 0).$$

Ponieważ w punkcie $x = -1$ funkcja zmienia rodzaj monotoniczności z rosnącej na malejącą to w punkcie tym funkcja ma maximum lokalne równe $f(-1) = \frac{59}{410}$, zaś w punkcie $x = 0$ funkcja ma minimum lokalne równe $f(0) = 0$. W punkcie $x = 1$ funkcja nie spełnia warunku dostatecznego istnienia ekstremum, zatem w punkcie tym ekstremum nie istnieje.

2. Niech $f(x) = x - 3 + \frac{4}{x-5}$. Rozpocznijmy od wyznaczenia dziedziny tej funkcji. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{5\}$. W celu wyznaczenia punktów stacjonarnych obliczymy pochodną f' i rozwiążemy równanie $f'(x) = 0$. Mamy

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-5)^2} = \frac{(x-5)^2 - 4}{(x-5)^2}.$$

Warunek $f'(x) = 0$ jest w przypadku naszej funkcji równoważny następującemu:

$$\frac{(x-5)^2 - 4}{(x-5)^2} = 0.$$

Z powyższego równania mamy:

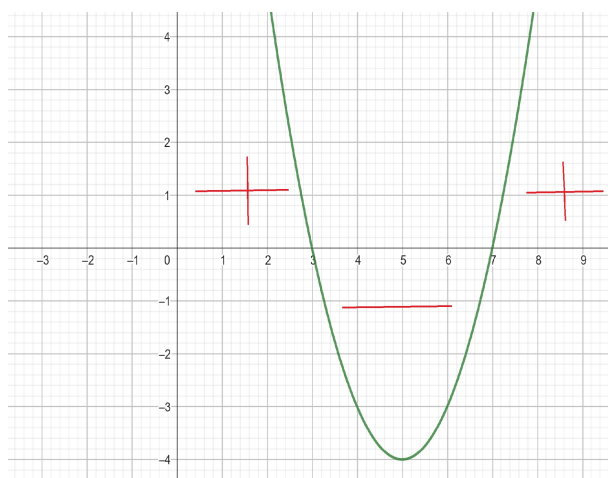
$$(x - 5)^2 = 4,$$

lub równoważnie:

$$|x - 5| = 2.$$

Stąd $x = 3$ lub $x = 7$. Zauważmy, że dla każdego x należącego do dziedziny funkcji $(x - 5)^2 > 0$. Zatem

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 - 4 > 0 \text{ oraz } f'(x) < 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 - 4 < 0.$$



Uwzględniając dziedzinę funkcji mamy:

$f'(x) > 0$ w przedziałach $(-\infty, 3)$; $(7, +\infty)$ zatem $f \nearrow$

i $f'(x) < 0$ w przedziałach $(3, 5)$; $(5, 7)$ stąd $f \searrow$.

Ponieważ w punkcie $x = 3$ funkcja zmienia rodzaj monotoniczności z rosnącej na malejącą to w punkcie tym funkcja ma maximum lokalne równe $f(3) = -2$, zaś w punkcie $x = 7$ funkcja ma minimum lokalne równe $f(7) = 6$.

3. Niech $f(x) = (x - 4)\sqrt{x - 1}$ Rozpocznijmy od wyznaczenia dziedziny tej funkcji.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $x \geq 1$. W celu wyznaczenia punktów stacjonarnych obliczymy pochodną f' i rozwiążemy równanie $f'(x) = 0$. Mamy

$$f'(x) = \sqrt{x-1} + (x-4) \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2(x-1)+x-4}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-6}{2\sqrt{x-1}}.$$

Warunek $f'(x) = 0$ jest w przypadku naszej funkcji równoważny następującemu:

$$\frac{3x-6}{2\sqrt{x-1}} = 0.$$

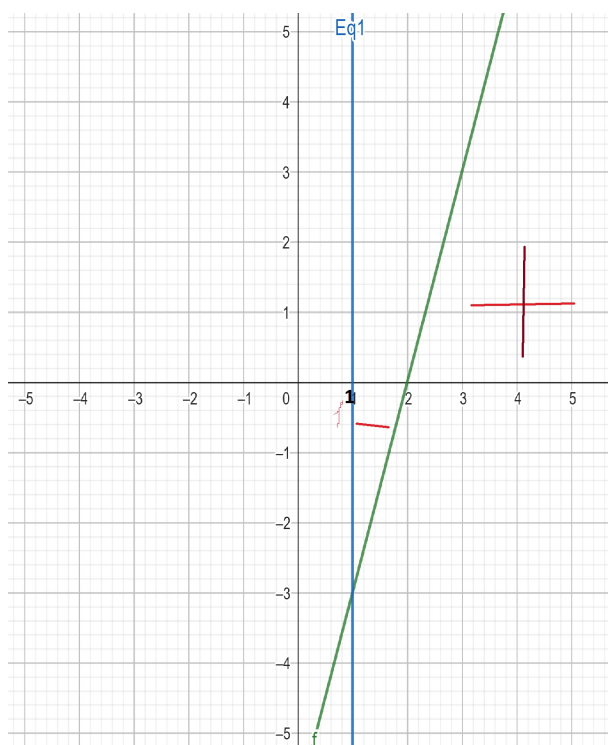
Przekształcając powyższe równanie mamy:

$$3x - 6 = 0$$

Stąd $x = 2$. Zauważmy, że dla każdego $x > 1$ mamy

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x - 6 > 0 \text{ oraz } f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x - 6 < 0.$$

Stąd:



$f'(x) > 0$ w przedziale $(2, \infty)$; zatem $f \nearrow$

i $f'(x) < 0$ w przedziale $(1, 2)$ stąd $f \searrow$.

Ponieważ w punkcie $x = 2$ funkcja zmienia rodzaj monotoniczności z malejącej na rosnącą to w punkcie tym funkcja ma minimum lokalne równe $f(2) = -2$.

4. Niech $f(x) = (3 - x)^5 \cdot (3x + 2)^4$. Dziedziną tej funkcji, jako wielomianu stopnia dziewiątego jest zbiór $\mathbb{R}$. W celu wyznaczenia punktów stacjonarnych obliczymy

po pochodną f' i rozwiążemy równanie $f'(x) = 0$. Mamy

$$f'(x) = 5(3-x)^4 \cdot (-1) \cdot (3x+2)^4 + (3-x)^5 \cdot 4(3x+2)^3 \cdot 3$$

Warunek $f'(x) = 0$ jest w przypadku naszej funkcji równoważny następującemu:

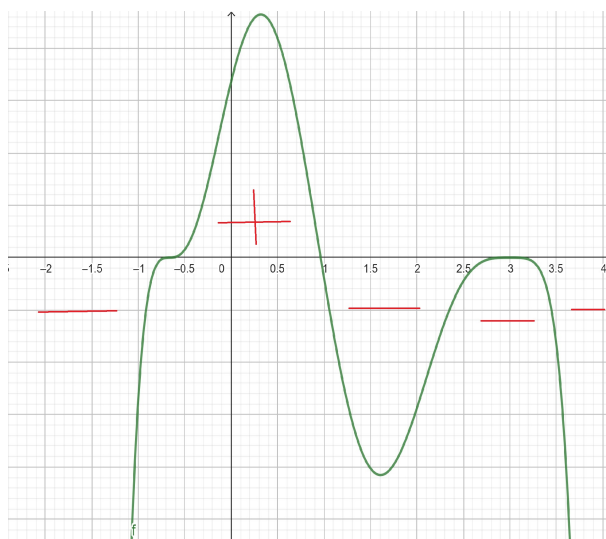
$$(3-x)^4 \cdot (3x+2)^3 \cdot (-5(3x+2) + 12(3-x)) = 0.$$

lub:

$$(3-x)^4 \cdot (3x+2)^3 \cdot (26-27x) = 0.$$

Stąd $x = 3$ lub $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{26}{27}$.

Zauważmy, że $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (3-x)^4 \cdot (3x+2)^3 \cdot (26-27x) > 0$ oraz $f'(x) < 0 \Leftrightarrow (3-x)^4 \cdot (3x+2)^3 \cdot (26-27x) < 0$.



Stąd $f'(x) > 0$ w przedziale $(-\frac{2}{3}, \frac{26}{27})$; zatem $f \nearrow$

i $f'(x) < 0$ w przedziałach $(-\infty, -\frac{2}{3})$, $(\frac{26}{27}, +\infty)$ stąd $f \searrow$.

Pochodna w punkcie $x = -\frac{2}{3}$ zmienia znak z ujemnego na dodatni, tzn że w punkcie tym jest ekstremum i jest to minimum równe $f(-\frac{2}{3}) = 0$, w punkcie $x = \frac{26}{27}$ pochodna zmienia znak z dodatniej na ujemną co znaczy, że w tym punkcie jest maksimum lokalne równe $f(\frac{26}{27}) = (\frac{55}{27})^5 \cdot (\frac{44}{9})^4$, w punkcie $x = 3$ nie ma ekstremum.

5. Niech $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{x+2}$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R}$. W celu wyznaczenia punktów stacjonarnych obliczymy pochodną f' i rozwiążemy równanie $f'(x) = 0$. Mamy

$$f'(x) = (2x + 1) \cdot e^{x+2} + (x^2 + x + 1) \cdot e^{x+2}.$$

Warunek $f'(x) = 0$ jest w przypadku naszej funkcji równoważny następującemu:

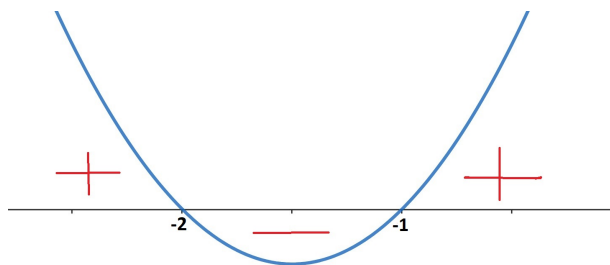
$$(x^2 + 3x + 2) e^{x+2} = 0.$$

Ponieważ funkcja wykładnicza nie przyjmuje wartości 0, zatem

$$x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Rozwiązując równanie kwadratowe otrzymujemy $x = -2$ lub $x = -1$.

Zauważmy, że funkcja wykładnicza przyjmuje zawsze wartości dodatnie, zatem $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 > 0$ oraz $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 < 0$.



Stąd $f'(x) > 0$ w przedziałach $(-\infty, -2)$, $(-1, +\infty)$ zatem $f \nearrow$ w tych przedziałach i

$f'(x) < 0$ w przedziale $(-2, -1)$, stąd $f \searrow$ w tym przedziale.

Pochodna w punkcie $x = -2$ zmienia znak z dodatniego na ujemny, tzn że w punkcie tym jest ekstremum i jest to maksimum równe $f(-2) = 3$, w punkcie $x = -1$ pochodna zmienia znak z ujemnej na dodatnią co znaczy, że w tym punkcie jest minimum lokalne równe $f(-1) = e$.

6. Niech $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 4}$ Rozpocznijmy od wyznaczenia dziedziny tej funkcji. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. W celu wyznaczenia punktów stacjonarnych obliczymy pochodną f' i rozwiążemy równanie $f'(x) = 0$. Mamy

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-4)-(x^2-2x+1)}{(x-4)^2}.$$

Warunek $f'(x) = 0$ jest w przypadku naszej funkcji równoważny następującemu:

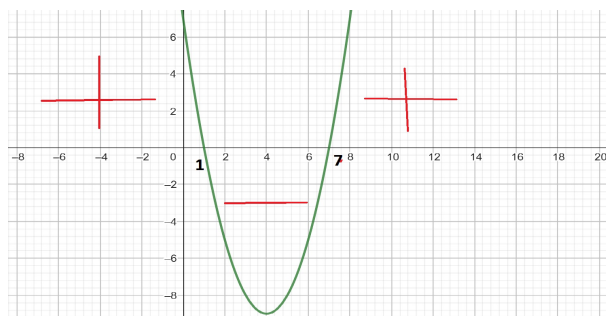
$$\frac{x^2 - 8x + 7}{(x-4)^2} = 0.$$

Z powyższego równania mamy:

$$x^2 - 8x + 7 = 0,$$

co po rozwiązaniu daje $x = 1$ lub $x = 7$. Zauważmy, że dla każdego x należącego do dziedziny funkcji $(x - 4)^2 > 0$. Zatem

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 > 0 \text{ oraz } f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 < 0.$$



Uwzględniając dziedzinę funkcji mamy:

$f'(x) > 0$ w przedziałach $(-\infty, 1)$; $(7, +\infty)$ zatem $f \nearrow$ w tych przedziałach

i

$f'(x) < 0$ w przedziałach $(1, 4)$; $(4, 7)$ stąd $f \searrow$ w tych przedziałach.

Ponieważ w punkcie $x = 1$ funkcja zmienia rodzaj monotoniczności z rosnącej na malejącą to w punkcie tym funkcja ma maximum lokalne równe $f(1) = 0$, zaś w punkcie $x = 7$ funkcja ma minimum lokalne równe $f(7) = 12$.

7. Niech $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$. Rozpocznijmy od wyznaczenia dziedziny tej funkcji. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. W celu wyznaczenia punktów stacjonarnych obliczymy pochodną f' i rozwiążemy równanie $f'(x) = 0$. Mamy

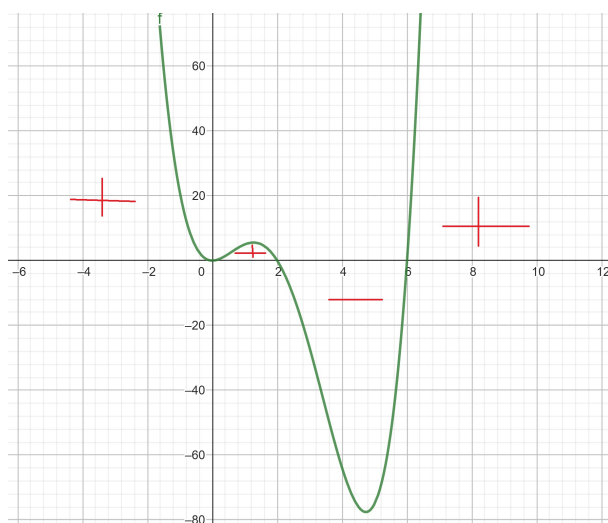
$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}.$$

Warunek $f'(x) = 0$ jest w przypadku naszej funkcji równoważny następującemu:

$$\frac{x^2(x-2)(x-6)}{(x-2)^4} = 0.$$

co po rozwiązaniu daje $x = 0$ lub $x = 2 \notin D$ lub $x = 6$. Zauważmy, że dla każdego x należącego do dziedziny funkcji $(x-2)^4 > 0$. Zatem

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2(x-2)(x-6) > 0 \text{ oraz } f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2(x-2)(x-6) < 0.$$



Uwzględniając dziedzinę funkcji mamy:

$f'(x) > 0$ w przedziałach $(-\infty, 2)$; $(6, +\infty)$ zatem $f \nearrow$ w tych przedziałach

i

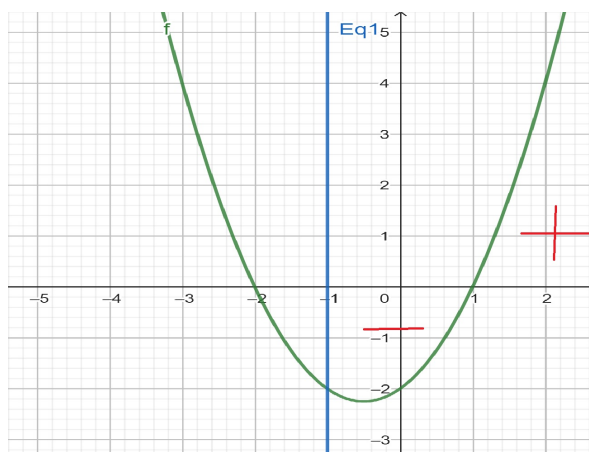
$f'(x) < 0$ w przedziałach $(2, 6)$; stąd $f \searrow$ w tych przedziałach .

Ponieważ w punkcie $x = 6$ funkcja zmienia rodzaj monotoniczności z malejącej na rosnącą to w punkcie tym funkcja ma minimum lokalne równe $f(6) = \frac{27}{2}$, zaś w punkcie $x = 0$ funkcja nie ma ekstremum.

8. Niech $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x+1)$ Dziedziną funkcji f jest przedział $(-1, \infty)$. Mamy

$$f'(x) = x - \frac{2}{x+1} = \frac{(x^2+x-2)}{x+1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x+1},$$

skąd miejscami zerowymi pochodnej są $x = -2$ oraz $x = 1$, przy czym -2 nie należy do dziedziny funkcji. Ostatecznie, jedynym punktem stacjonarnym funkcji f jest $x = 1$. Wystarczy narysować szkic wykresu licznika pochodnej (mianownik jest dodatni, co wynika z dziedziny funkcji f).



Odczytujemy, że

$$f'(x) < 0 \quad \text{dla} \quad x \in (-1, 1) \quad \text{oraz} \quad f'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in (1, \infty).$$

Mamy więc następujące wnioski:

- a) funkcja f maleje w $(-1, 1)$ i rośnie w $(1, \infty)$,
- b) funkcja f osiąga w $x = 1$ lokalne minimum równe $f(1) = \frac{1}{2} - 2 \ln 2$.